Alfredo Deaño

Introducción a la lógica formal

Filosofía y Pensamiento

Alianza Editorial

Introducción a la lógica formal

Manuales / Filosofía y Pensamiento

El libro universitario

Alfredo Deaño

Introducción a la lógica formal

Alianza Editorial

Primera edición en «Alianza Universidad Textos»: 1974
Primera edición en «Manuales»: 1999

Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; teléf. 91 393 88 88
ISBN: 84-206-8681-6
Depósito legal: S. 786-1999
Fotocomposición EFCA, S. A.
Parque Industrial «Las Monjas». 28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)
Imprime: Gráficas VARONA
Polígono «El Montalvo», parcela 49
37008 Salamanca
Printed in Spain

A mis padres y hermanos,
a Mercedes, a Javier Muguerza y a Juan A. del Val.

INDICE

NOTA PRELIMINAR

Entre los múltiples proyectos que Alfredo Deaño dejó pendientes al morir, se encuentra la revisión completa de esta nueva edición conjunta de los dos volúmenes de un *Introducción a la Lógica*, que ha debido ser reconstruida aproximadamente por sus amigos a partir de materiales dispersos.

Las modificaciones más importantes que Alfredo Deaño tenía pensadas afectan a los ejercicios, que aparecen ahora considerablemente aumentados y reunidos en el Apéndice final, y al capítulo antes titulado «Perspectivas». Los temas tratados en éste deberían aparecer ampliados y reorganizados en el nuevo Capítulo IV, «Más allá de este libro». Por desgracia, su trabajo quedó inconcluso y, siendo el fruto de sus ideas sobre los últimos desarrollos de la lógica en campos aún fluidos, es irreconstruible. Los materiales utilizados para terminar de algún modo el capítulo son demasiado viejos, dado que en los últimos tiempos Alfredo Deaño había dedicado mucha atención a las lógicas no-clásicas, por lo que tenía muchas cosas nuevas que decir. Aun pretendiendo ofrecer «narrativamente» una caracterización breve y pedagógica de esas lógicas, es evidente que no se reducía a presentar un catálogo, sino que se esforzaba por hallar unos criterios para organizar y clarificar esas divergencias y complementos de la lógica «normal». En cuanto al último apartado —«Lógica y filosofía»— de ese capítulo, se ha optado por reproducir sin modificación la conferencia que bajo el mismo título pronunciara Alfredo Deaño en la Universidad de La Laguna en enero de 1976.

Hay muchas otras modificaciones menores a lo largo de todo el libro. La obra fue peinada en su totalidad, corrigiendo erratas e introduciendo todo tipo de mejoras. Hay también una gran cantidad de ejemplos

suprimidos a fin de agilizar el texto. Con todo, la eliminación de ciertos ejemplos especialmente chispeantes sólo se entiende teniendo en cuenta que Alfredo Deaño era demasiado delicado como para herir innecesariamente la susceptibilidad de algunos miembros de la comunidad filosófica, tal vez lectores de su libro. Quizá haya que incluir en esta categoría el antiguo ejemplo de disyunción no excluyente:

> Se aprende ciencias ocultas estudiando la obra de los teósofos *o* leyendo a Althusser.

No es probable que entretanto hubiese modificado su opinión acerca de semejantes productos filosóficos; más bien parecería que su optimismo le llevase a creer que incluso sus practicantes podían ser ganados para la lógica.

Uno de los proyectos ni siquiera emprendidos consistía en redactar un nuevo Prefacio que englobase los dos anteriores, recogiendo además las críticas recibidas a propósito del libro e insistiendo, una vez más, en la necesidad de hacer compatible el rigor lógico con la elegancia («y, a la postre, el rigor») del lenguaje. Como suele ocurrir con los Prefacios, esa tarea quedó para el final y ni siquiera llegó a iniciarla. Sólo han quedado una serie de anotaciones redactadas en diversos momentos, en las que se mencionan diferentes temas a tocar, a fin de que nada se le quedase en el tintero.

Una buena parte de esas notas alude al carácter de la nueva edición, señalando la necesidad de introducir precisiones de carácter pedagógico*. Indicaba que la enseñanza de la lógica se halla en tensión entre aquellos «que no entiende el simbolismo y los que lo dan por superado». Hacía continuamente hincapié en que había pretendido aunar la lógica con el buen castellano, cosa que consiguió cumplidamente. En este sentido comentaba: «hubo que echar literatura para hacer la lógica encantadora».

Por lo que respecta al contenido de las modificaciones, deseaba señalar la supresión de una buena cantidad de notas y de unos cuantos párrafos de la antigua «Introducción» (ahora Capítulo I: «Primeros Conceptos»). No quiso modificar apenas el resto del capítulo, prefiriendo retomar esas cuestiones a un mayor nivel al final del libro.

Señalaba también que su libro no pretendía competir con otras obras introductorias, sino que quería ser más bien una propedéutica a ellas. Con esta fórmula modesta no indicaba que su libro fuese más elemental que otros manuales, sino que tenía un fin distinto. El suyo no era simplemente un manual de texto para alumnos de lógica, sino también una verdadera «introducción» propagandística («en sentido etimológico») a la lógica para cualquier persona interesada. Para un curso de lógica

* En relación con las ideas de Alfredo Deaño acerca de la cuestión, podrá en breve verse un trabajo «sobre la enseñanza de la lógica», recogido en el volumen de artículos suyos que publicará Taurus.

casi cualquier manual es bueno, dado que las insuficiencias del texto, así como sus oscuridades, pueden subsanarse en clase. Lo realmente difícil es escribir un libro que alguien pueda leer, entender y disfrutar por cuenta propia, metiéndose también de lleno en los problemas filosóficos que la lógica suscita. Esa es la tarea que se impuso y que tan brillantemente realizó. En este sentido decía que el suyo era «un libro para *leer de corrido* —para *introducirse*, a través de él, en la lógica— y no un libro de consulta». Pensaba que era muy importante señalar eso y no se explicaba muy bien cómo se le había olvidado decirlo en la primera edición.

La inmersión en los problemas actuales de la lógica, especialmente el desarrollo de nuevas lógicas suscitadas por problemas externos, debía producirse en el capítulo IV inacabado, y para ello consideraba necesario introducir históricamente los problemas que tratan de solucionar.

Finalmente, deseaba extender su lista inicial de agradecimientos a personas como José Ferrater Mora, José Luis Zofío y Jesús Hernández, entre otros que no menciona.

Madrid, 1978 *Carlos Solís*

[(Añadido en la segunda edición.) En esta nueva edición se ha corregido un error de las anteriores. El sistema de deducción natural utilizaba una regla de eliminación y otra de introducción para cada conectiva. El problema planteado con ello era que si bien en ese sistema, con las reglas de introducción y eliminación de la (simple) negación, se puede obtener la de introducción de la doble negación, no se puede obtener la de eliminación de la doble negación, de tan frecuente uso en las reducciones al absurdo. (A la inversa, con la regla de eliminación de la (doble) negación se puede obtener la de eliminación de simple negación, conocida como *ex contradictione quodlibet*.) El deseo de máxima «simplicidad» y simetría en las reglas primitivas da lugar a un sistema intuicionista incapaz de generar el sistema clásico, como sería de desear en una obra introductoria, incluyendo, v. g., las reglas de De Morgan. La situación podría resolverse añadiendo como primitiva la regla correspondiente al principio de tercio excluso, para derivar luego con su ayuda la regla de doble negación. Ha parecido, sin embargo, más económico sustituir la antigua regla primitiva de eliminación de la (simple) negación por la de eliminación de la (doble) negación, rompiendo así la simetría con la de introducción de la (simple) negación, aunque obteniendo a cambio la doble regla de contraposición del condicional y, con ella, la antigua regla primitiva de eliminación de la (simple) negación. El resto de las demostraciones se ha corregido de acuerdo con ello.]

PROLOGO

Acostumbran los autores a rematar los prólogos de los libros mostrando su agradecimiento hacia todos aquellos que de un modo u otro han ayudado a que el libro se escribiera. Nosotros terminaremos también el nuestro de ese modo. Vamos a empezarlo, sin embargo, dedicando un recuerdo a los enemigos: si los amigos han hecho posible este libro, los enemigos *nos* lo han hecho necesario.

Y dos son, en España en 1973, los enemigos fundamentales de la lógica formal: los que, para abreviar, llamaremos «dialécticos», y aquellos otros a los que, en un sentido que luego explicaremos, vamos a denominar «medievales».

A los primeros debemos algunas de las manifestaciones más irritantes y a la vez regocijantes acerca de la ciencia que con este libro empezamos a exponer. Han dado en pensar que la lógica formal es una especie de Derecho Mercantil del intelecto: así como éste no sería otra cosa que la regulación jurídica de determinados procesos económicos que tienen lugar en la sociedad capitalista y que desaparecerán con ésta, así también la lógica constituiría la regulación formal de los procesos de pensamiento que se desarrollan en las mentes positivistas. La lógica formal —lógica del pensamiento administrado— ha de ser, como el capitalismo, superada.

Es imposible ocuparse aquí en detalles de analizar esta idea, si es que de una idea se trata. Una de dos: o es que hay que postular la extravagante hipótesis de que son dos los tipos de cerebro humano —cerebros encadenados, con conexiones neuronales «de carril», de cuyo autorrepresivo

---

* Este *Prólogo* pertenece al volumen I de la *Introducción a la lógica formal* que constaba de los capítulos I y II de la obra actual.

comportamiento daría perfecta cuenta la lógica formal, y (fase superior en la evolución) cerebros libres, de neurona ágil, cerebros bravos capaces de desconcertantes conexiones, cerebros, en suma, «dialécticos», entre comillas—; o, por tosco que parezca, es que lo que se presenta como avanzada de la reflexión filosófica no constituye en muchos casos más que el retorno a formas primitivas de pensamiento. La lógica —en cuanto tal, e independientemente de los usos que de ella se hayan hecho o pretendan hacerse— es solamente una ciencia: ni administra ni prescribe. Se limita a presentar formalizadamente las leyes a las que la mente humana se atiene cuando se aplica a razonar.

Por «medievales» entendemos, no los lógicos de la Edad Media —a muchos de los cuales se deben espléndidas contribuciones al desarrollo de esta ciencia—, sino aquellos para quienes la lógica formal se reduce a la lógica que se imparte en nuestra *Enseñanza Media*. Es una «lógica» que parece escrita por un precursor de Aristóteles no demasiado agudo. Tampoco merece la pena que nos ocupemos de ella. La historia marcha en su contra.

Cierto que la actitud, envarada y esotérica, de muchos lógicos formales ha favorecido bien poco la generalización del interés por esta disciplina. Persuadidos del carácter autosuficiente de su ciencia, se consumen en la contemplación de su «pureza cristalina», como diría Wittgenstein, y, no queriendo que su ciencia se contamine, la enrarecen. Parecen olvidar que la proposición «Todo lo que no es formalizable no está en el mundo» es falsa.

Nada de todo esto ha hecho a la lógica perder su importancia. Ella y la matemática son ciencias que penetran todas las demás ciencias. Ella, tanto o más que otras ciencias, nutre de problemas a la filosofía. No es sólo, por tanto, la fecundidad filosófica de su estudio: es también la universalidad de su aplicación, la inevitabilidad de su presencia, lo que nos la hace, más aún que interesante, necesaria. La lógica es, a la vez, capacidad de análisis y posibilidad de ironía.

Al emprender la redacción de este libro perseguíamos varios objetivos. Confesaremos tres: hacer un libro claro; hacer un libro irónico; hacer un libro claro e irónico sin mengua del rigor. Con otras palabras: hacer un libro útil y no demasiado aburrido, pero un libro serio. Un libro mediante el cual pueda quien lo desee iniciarse seria y fácilmente en la lógica formal.

Demasiado fácilmente, ha de decir alguno. Demasiadas páginas sólo para exponer la lógica de enunciados. Demasiadas concesiones en la presentación de tema tan elemental.

En cuanto a lo primero, nuestra experiencia docente en Facultades españolas de Filosofía nos dice que nunca es demasiado fácil una introducción a la lógica: que es demasiado fácil exponer la lógica abrupta-

mente, y bastante difícil hacer comprender cuál es el lugar —abstracto lugar— que la lógica ocupa. Hemos enseñado lógica a alumnos de la especialidad de Filosofía y a alumnos de la especialidad de Psicología. Los primeros nos han obligado a intentar precisar la función de la lógica como instrumento de la reflexión filosófica. A los segundos hemos de agradecerles el que, a través de su desconfianza respecto de la utilidad de la lógica para la psicología, nos hayan forzado a buscar lo formal en lo concreto, a ventilar la lógica poniéndola en contacto con el estudio empírico de nuestros procesos intelectuales. En unos y en otros —es decir, en personas que en virtud de los planes de estudio vigentes se han visto privadas de conocimientos matemáticos, o han huido de ellos— está el origen de este libro. Libro que, sin embargo, no se dirige sólo a los alumnos: también, y en la misma medida, a todos aquellos lectores que simplemente quieran iniciarse, con muchas facilidades y un cierto sentido del humor, en éste que el fascinante Lewis Carrol calificó de «arte fascinante».

Tampoco faltarán quienes nos acusen de habernos demorado en la lógica de enunciados, de haber dedicado todo un volumen al cálculo lógico más elemental. Pero es que si para un lógico avezado la lógica de enunciados no reviste especial interés teórico, especial interés didáctico reviste para el principiante en lógica. Manejando ese cálculo sencillo y «doméstico» podrá adiestrarse para empresas lógicas de mayor alcance.

Podría, por último, reprochársenos el haber introducido, en la exposición de conceptos y técnicas tan poco complicados, demasiadas explicaciones, el habernos repetido tanto. También aquí hemos de recurrir a las enseñanzas de nuestra profesión de enseñante. Volver atrás, repetir lo ya dicho muchas veces, ha sido, para el alumno, una necesidad, y, para nosotros, un motivo de impaciencia. Cierto que, tratándose de un texto escrito, la dificultad se mitiga. Le bastaría al lector interesado con volver a páginas anteriores. Pero hemos preferido ahorrarle ese esfuerzo haciendo nosotros el de recordarle lo necesario en el momento oportuno.

Son ya muchos los libros de lógica publicados. Muchos también los traducidos al castellano. Y son tres los escritos recientemente en nuestra lengua: los de Manuel Sacristán*, Jesús Mosterín** y Manuel Garrido***. Suponemos que la afirmación de que todas estas obras y, en especial, las tres últimas, hacen superfluo este libro será tomada como afirmación retórica. No es retórico el reconocimiento de nuestra deuda con todas ellas.

Llegada la hora de los agradecimientos, he de mencionar el que debo al Departamento de Filosofía de la Universidad Autónoma de Madrid,

* *Introducción a la lógica y al análisis formal*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1964.

** *Lógica de primer orden*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1970.

*** *Lógica simbólica*. Volumen I. Madrid, Editorial Tecnos, 1973; segunda reimpresión revisada, 1977.

construido por el profesor Carlos Paris, y al equipo de trabajo que en el I. C. E. de esa misma Universidad y bajo la dirección de Juan A. del Val, desarrolló, mientras pudo, el proyecto de investigación 2.2.1.

Gustavo Bueno, en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Oviedo, en 1961, me inició traumáticamente en la lógica formal, y en otras muchas cosas.

Numerosos amigos —por orden alfabético, Pilar Castrillo, Vidal Peña, Carlos Piera, Javier Pradera, Victor Sánchez de Zavala, Carlos Solís, Pilar Soto, Juan A. del Val, etc.— han seguido con un interés totalmente desprovisto de justificación la gestación de este libro, llegando algunos incluso a leer partes de él.

Que lo escribiéramos fue idea de Javier Muguerza. No por eso, sin embargo, ha de considerársele culpable.

Los alumnos que han venido escuchándonos tres veces por semana en los últimos tiempos son, ya lo hemos dicho, la verdadera razón de que este libro exista, y, aunque no pensamos obligarles a que lo adquieran, esperamos que su existencia sea una razón para que, en medio de otras tareas más urgentes, dediquen algún momento al estudio de la lógica.

Siendo la especialidad de Mercedes Cabrera la historia contemporánea de España, no puede decirse que la ayuda por ella prestada haya sido de orden técnico.

Madrid, 6 de septiembre de 1973.

ALFREDO DEAÑO

NOTA A LA SEGUNDA EDICION*

Nos hemos limitado a corregir las erratas, errores e inconveniencias que hemos podido encontrar, así como a intentar mejorar la presentación del texto.

Madrid, 5 de abril de 1975.

A. D.

* Se trata de la 2.ª edición del Volumen I.

NOTA AL VOLUMEN 2

Este libro constituye la continuación de la *Introducción a la lógica formal* (1. *La lógica de enunciados*) publicada en esta misma Colección** y recientemente reeditada. Esta segunda entrega consta, como puede verse por el Indice, de dos partes. La primera —y más larga, con mucho— contiene una iniciación —facilitada con ejemplos numerosos y reiteraciones constantes— a la lógica elemental de predicados en toda su extensión, y se completa con un capítulo de ejercicios. La Segunda Parte se compone de un capítulo titulado «Perspectivas» y de una breve Bibliografía. Por lo que hace al primero, se trata —dicho sea en el estilo de algunos de nuestros ensayistas— de un «capítulo alféizar», cuyo propósito no es otro que el de asomar al lector a los múltiples y variados desarrollos que —más allá de lo expuesto en esta obra— está la lógica formal experimentando. En cuanto a la Bibliografía, ya se ha dicho en el lugar oportuno que se trata tan sólo de una mínima selección de textos, guiada en muchas ocasiones por las puras preferencias personales del autor, y limitada, en otras, por el casi insuperable hastío que le produce confeccionar listas de publicaciones. Con todo, es de esperar que esa relación de libros surta sus efectos: el efecto, sobre todo, de estimular a leer más —y, desde luego, mejores— cosas sobre lógica.

Este segundo volumen es deliberadamente escueto (no, por supuesto, en el estilo, sino en el contenido). Quedan, sin duda, muchos temas por tratar, o por tratar más detenidamente. Hemos creído, sin embargo, que

* Esta nota pertenece al Volumen II de la *Introducción a la lógica formal*, que constaba aproximadamente de los capítulos III, IV y Apéndice de la obra actual.

** Alianza Universidad, n.º 64.

era cosa de tratarlos de otro modo. No de modo introductorio, resignadamente didáctico, sino de manera problemática, no codificada, más acorde con el carácter abierto de esas cuestiones que aquí apenas hemos bordeado, pero algunas de las cuales nos proponemos afrontar en otro lugar y en otro tono.*

Las consideraciones generales que hacíamos en el Prólogo al Volumen I —y que presentaban a la lógica formal terciando entre, de una parte, el oscurantismo y la flojera pseudo-progresista, y, de otra parte, entre la gaseosa especulación gratuita y la pobre astringencia formalista— siguen siendo válidas aquí. Los agradecimientos, también, aunque habría que multiplicarlos en número e intensidad.

Madrid, 19 de julio de 1975.
Alfredo Deaño.

* Un tratamiento más detenido de esas otras cuestiones puede verse en A. Deaño, *Las concepciones de la lógica*, Madrid, Taurus Ediciones, 1979.

Capítulo I
PRIMEROS CONCEPTOS

El lenguaje y sus usos

La lingüística científica nos ha acostumbrado a saber que nuestras posibilidades de uso del lenguaje son propiamente infinitas. En efecto: el dominio de una lengua consiste esencialmente en la capacidad de recrearla constantemente produciendo de continuo oraciones nuevas (y no sólo «frases hechas»). A su vez, esas infinitas oraciones nuevas pueden enunciarse en infinitos contextos distintos. Nos servimos del lenguaje[1] para los menesteres más diversos: para hacer preguntas, para elevar súplicas, para dar órdenes, para proferir insultos, para expresar deseos. Y también, a veces, para formular afirmaciones acerca de los objetos, es decir, para enunciar hechos o describir situaciones.

[1] O tal vez, en otro sentido, se sirve él de nosotros, y nosotros somos presas de él. Recordemos, por una parte, a Humpty Dumpty, el personaje de Lewis Carrol (*A través del espejo*, cap. VI) y sus arrogantes manifestaciones, propias de un señor del lenguaje:

> «Cuando *yo* uso una palabra» —dijo Humpty Dumpty en un tono más bien desdeñoso— «esa palabra significa exactamente lo que yo quiero que signifique. Ni más ni menos.»
>
> «La cuestión está» —dijo Alicia— «en si usted *puede* hacer que las palabras signifiquen tantas cosas diferentes.»
>
> «La cuestión está» —dijo Humpty Dumpty— «en quién es el que manda. Eso es todo.»

Pero recordemos también a los filósofos que han dicho que el hombre —y, eminentemente, el hombre filósofo— está prisionero en las redes del lenguaje, «seducido por el lenguaje» (Nietzsche, *Werke*, II (ed. Schlechta), págs. 789 y 790), «embrujado por él» (Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*, n.º 109).

Ante una pregunta no tiene sentido plantearse el problema de si es verdadera o falsa, de si enuncia o no un estado de cosas que de hecho se da[2]. Otro tanto cabe decir de una exclamación o de una súplica, por ejemplo[3]. Las preguntas, las órdenes o las súplicas no tienen valor de verdad. Sí lo tienen en cambio, y necesariamente, las afirmaciones que hacemos acerca del mundo.

Al uso del lenguaje cuando lo empleamos para hace oraciones verdaderas o falsas lo llamamos, desde Aristóteles, uso *apofántico* (de ἀπόφασις, declaración, enunciación). «Todo discurso (*λόγος*)» —dice Aristóteles— «es significativo (...). Pero no todo discurso es apofántico, sino sólo aquel en el que se da el ser, verdadero o falso. No se da esto en todos, pues, por ejemplo, un ruego no es ni verdadero ni falso». Y añade: «Esta investigación es una investigación acerca del discurso apofántico»[4]. La lógica actual no se ocupa exclusivamente, aunque sí básicamente, del discurso apofántico, es decir, de aquel tipo de discurso caracterizado por que sus enunciados tienen forzosamente un valor de verdad. A este tipo de discurso se le llama también enunciativo, declarativo, representativo, indicativo, descriptivo, asertórico, aseverativo, etc.

Sea la siguiente oración:

Gregorio Samsa se convirtió en un monstruoso insecto

Traduzcamos esa oración, escrita en castellano, a algunas otras lenguas:

Gregor Samsa hat sich in einem ungeheuerlichen Insekten verwandelt
Gregorius Samsa in immanem insectum se conversit
Gregory Samsa became a monstruous insect
Gregor Samsa s'est transformé dans un monstrueux insect
Gregor Samsa si transformo in un mostruoso insetto

He ahí seis oraciones. Seis oraciones que son distintas, porque son seis distintas manchas sobre el papel y a la vez seis manchas distintas sobre el papel. Y, sin embargo, en un sentido muy claro esas seis oraciones «dicen lo mismo». Con otras palabras: esas seis oraciones distintas enuncian *una misma proposición.* Mediante las oraciones enunciamos proposiciones. Al producto de ese acto lingüístico le llamamos 'enunciado'. Al hablar

[2] Por ejemplo, la pregunta —ciertamente no habitual— «¿Por qué quien ama nunca/busca verdad, sino que busca dicha?» (Claudio Rodríguez, *Alianza y Condena*) no es, en cuanto tal, ni verdadera ni falsa (aunque sí puede serlo la afirmación a la que cabría traducirla: «Todos los que aman buscan dicha, no verdad»).

[3] Por respecto a una especie de exclamación como «A mí, tan luego, hablarme del finado Francisco Real» (J. L. Borges, *Hombre de la esquina rosada*), el problema de la verdad y la falsedad no surge. Y, ¿quién se pararía a buscar el método de verificación de una expresión como «Pero espérame/guárdame tu dulzura» (Pablo Neruda, *Los versos del capitán*).

[4] *De Interpretatione*, 16 a 33-17 a 7.

de un enunciado estamos, por tanto, hablando *conjuntamente* de una oración y de la proposición que en ella se expresa. Y así diremos, por ejemplo, que el enunciado 'Gregorio Samsa se volvió insecto' es verdadero[5].

Lenguaje y metalenguaje

«'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', dijo Averroes», escribe Jorge Luis Borges[6].

Dice Hipólito en su obra *Refutatio omnium haereseum*[7]: «la frase 'el bien y el mal son uno' fue escrita por Heráclito»[8].

Es verdad que Valle-Inclán ha escrito: «A bordo de la *Dalila*, lo recuerdo con orgullo, asesiné a sir Roberto Yones»[9].

¿Qué tienen en común las tres afirmaciones que acabamos de hacer? Ciertamente, ni el más empedernido defensor de la idea de que todo está relacionado con todo se atrevería a decir que los tres textos hablan del mismo asunto, o que en ellos se menciona a las mismas personas. Y, pese a ello, es innegable que tienen algo en común (además de su artificiosidad). Lo que tienen en común es que en todos ellos se da lo que pudiéramos llamar una «estratificación del lenguaje»; en todos ellos cabe observar la presencia de distintos planos de lenguaje. En efecto. Hay, en primer lugar, en cada uno de ellos, una frase —'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor', 'El bien y el mal son uno', 'A bordo de la *Dalila*, lo recuerdo con orgullo, asesiné a sir Roberto Yones', respectivamente— que se refiere, o pretende referirse, a la realidad extralingüística, al mundo. Encontramos, en segundo término, unas expresiones —'dijo Averroes', 'fue escrita por Heráclito' y 'Valle-Inclán ha escrito'— que no se refieren a una realidad ajena al lenguaje —el mal, los poetas, sir Roberto Yones—, sino a las frases antes citadas. Son, pues, expresiones que no se refieren propiamente al mundo, sino a otras expresiones. No hablan del mundo, sino de algo que se ha dicho acerca del mundo. Y están, por último, otras tres oraciones —'escribe Jorge Luis Borges', 'dice Hipólito' y 'es verdad' que se refieren, no a los objetos, ni siquiera

[5] Al menos en la ficción —no tan ficticia, después de todo— de Kafka.

[6] En su relato *La busca de Averroes*. Georg Cantor, fundador de la teoría de conjuntos, pensaba, como buen platónico, que no estaba inventando nada. Por el contrario, consideraba su tarea parecida a la de un notario que levantara acta de la existencia de una determinada realidad: en este caso, la de los conjuntos, sus propiedades y relaciones. Incluso si ambas afirmaciones —la presunta de Averroes y la de Cantor— fueran ciertas, ello no querría decir, como veremos al hablar de la lógica de la identidad, que ser matemático y ser poeta sea lo mismo, sino sólo —y no es poco— que no son cosas completamente distintas. Cfr., en cambio, Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I, 167: «El matemático es un inventor, no un descubridor».

[7] IX, 10.

[8] Fragm. 58.

[9] De la Autobiografía aparecida en 1903 en la revista *Alma española*.

a las expresiones, antes mencionadas, que se refieren a los objetos, sino a las expresiones que se refieren a las expresiones que se refieren a los objetos. Así, en el caso del tercer ejemplo, no decimos que sea verdad que Valle-Inclán asesino a sir Roberto Yones, sino que es verdad que dice que lo hizo.

En los tres ejemplos propuestos hay, pues, un nivel de lenguaje —al que llamaremos «nivel L_0»— en el que estamos refiriéndonos a objetos; a objetos no lingüísticos. Otro nivel, el L_1, en el que no se habla de objetos, sino de las expresiones del nivel L_0. Y un tercer nivel, el L_2, en el que hacemos referencia a las expresiones del nivel L_1. En esquema:

«'Un famoso poeta es menos inventor que descubridor' (→ L_0) *dijo Averroes»,* (→ L_1)

escribe J. L. Borges (→ L_2)

Es fácil ver que la serie de niveles podría prolongarse indefinidamente: nivel L_3, nivel $L_4, \ldots, L_n$. Cabría, en efecto, decir, por ejemplo: afirma Alfredo Deaño que Jorge Luis Borges escribe que Averroes dijo que un poeta es menos inventor que descubridor. Etc.

En rigor, por respecto a un determinado nivel de lenguaje —el L_2, por ejemplo—, todos los niveles inferiores —en este caso, el L_0 y el L_1— se consideran como un único nivel.

Pues bien: al lenguaje que empleamos para hablar acerca de otro lenguaje le llamamos *«metalenguaje»* de este último. Y a este último le llamamos *«lenguaje-objeto»* por respecto al anterior. Así, en el segundo ejemplo, la oración 'dice Hipólito en su *Refutatio omnium haereseum*' sería una expresión metalingüística que se refiere a la expresión del lenguaje objeto «la frase 'el bien y el mal son uno' fue escrita por Heráclito». Obviamente, los conceptos de lenguaje-objeto y de metalenguaje no deben entenderse en sentido absoluto, como si hubiera unas expresiones que fueran metalingüísticas en todos los casos y otras que no pudieran serlo nunca. Cierto que hay expresiones —como, por ejemplo, la expresión 'es verdadero' (y también, naturalmente, 'es falso')[10]— que se refieren siempre a enunciados y no a cosas: la expresión 'es verdadero' se refiere, concretamente, a la correspondencia de los enunciados con los hechos y, por tanto, pertenece siempre a un metalenguaje por respecto a aquel o a aquellos enunciados a los que se refiere. Ello no obsta, sin embargo, para que pueda decirse en general que el que una expresión pertenezca al metalenguaje o al lenguaje —objeto— en rigor, a *un* metalenguaje o a *un* lenguaje-objeto— depende del puesto concreto que esa expresión

[10] Entendiendo 'verdad' como *veritas sermocinalis*, es decir, como la verdad de un enunciado que describe un estado de cosas que de hecho se da (*adaequatio intellectus et rei*).

ocupe dentro de un determinado contexto. Veamos un ejemplo con las nociones de verdad y falsedad. En el enunciado

Es verdadero que (→ L_1) *'Abulcásim ha estado en China', es falso* (→ L_0)

la expresión 'es falso' pertenece al lenguaje-objeto por respecto a la expresión 'es verdadero' (aunque pueda decirse que pertenece al metalenguaje por respecto a 'Abulcásim ha estado en China'). En cambio, en el enunciado (que viene a decir lo mismo que el anterior, a saber, que Abulcásim no ha estado en China)

Es falso que (→ L_1) *'Abulcásim ha estado en China' es verdadero* (→ L_0)

la expresión 'es verdadero' pertenece al lenguaje objeto por respecto a 'es falso' (si bien cabría decir que pertenece al metalenguaje por respecto a la expresión 'Abulcásim ha estado en China').

Usamos, pues, el lenguaje casi siempre para referirnos a los objetos, a objetos no lingüísticos. Usamos primariamente el lenguaje en lugar de los objetos[11]. Pero hay ocasiones en que usamos el lenguaje para hablar acerca del lenguaje (como se hace sistemáticamente, dicho sea de paso, en la lingüística). *Usamos* entonces un metalenguaje para *mencionar* las expresiones de un lenguaje. Los conceptos de *uso* y *mención* son paralelos a los de lenguaje y metalenguaje. Cuando decimos, por ejemplo,

escuchaba la lluvia de las cabelleras en los cristales de mi indolencia[12]

[11] Cfr. ya Aristóteles: «Utilizamos los nombres como signos de las cosas» (*De Soph. El.*, 165 a 7-8). Jonathan Swift cuenta, en los *Viajes de Gulliver*, cómo uno de los proyectos de los profesores miembros de la Real Academia de Lagado era «un plan para abolir por completo las palabras, cualesquiera que fuesen; y se defendía como una gran ventaja, tanto respecto de la salud como de la brevedad. Es evidente que cada palabra que hablamos supone, en cierto grado, una disminución de nuestros pulmones por corrosión, y, por lo tanto, contribuye a acortarnos la vida; en consecuencia, se ideó que, siendo las palabras simplemente el nombre de las cosas, sería más conveniente que cada persona llevase consigo todas aquellas cosas de que fuera necesario hablar en el asunto especial sobre el que había de discurrir. Y este invento se hubiese implantado, ciertamente, con gran comodidad y ahorro de salud para los individuos, de no haber las mujeres, en consorcio con el vulgo y los ignorantes, amenazado con alzarse en rebelión si no se les dejaba en libertad de hablar con la lengua al modo de sus antepasados; que a tales extremos llegó siempre el vulgo en su enemiga por la ciencia.» (De la traducción publicada en la Colección Austral. Madrid, Espasa-Calpe, 1941, pág. 148). Lo que ha hecho Swift —y no cabe duda de que con esta prosaica observación estamos echando a perder la inmensa gracia de esta fabulación suya— es explotar el absurdo error consistente en pensar que las palabras son simplemente el nombre de las cosas. En efecto: como es bien sabido, el lenguaje no es un conjunto de rótulos, sino un aparato conceptual.

[12] André Breton-Philippe Soupault: *S'il vous plait*, acto primero.

lo que estamos haciendo es *usar* las palabras para tratar de expresar una determinada —y refinada— sensación. Cuando decimos, en cambio,

la expresión 'democracia popular' es una redundancia

estoy, sin duda, *usando* ciertas palabras —estoy usando *todas* las palabras que he empleado para decir eso—, pero lo interesante aquí es que algunas de esas palabras —concretamente, las palabras 'democracia' y 'popular'—, además de estar siendo usadas, están siendo *mencionadas*. Las hemos usado para mencionarlas; las hemos empleado para hablar acerca de ellas mismas.

Nos limitamos a usar una palabra cuando nos servimos de ella como *signo*, es decir, para aludir a algo distinto de ella misma (como cuando empleamos la palabra 'viento' para referirnos a un determinado fenómeno de la naturaleza, o como cuando empleamos el término 'priscilianistas' para aludir a los partidarios de cierta herejía). Mencionamos, en cambio, una palabra —además de usarla, o usándola con ese fin— cuando nos referimos a la palabra misma, cuando nos detenemos en ella, sin ir más allá[13]. La señal de esta detención en la palabra —la indicación de que esta vez no nos referimos a la cosa, sino que «nos quedamos» en el lenguaje— son las comillas:

'Amar' es un verbo de significado muy complejo
Al mar, los marineros le llaman 'la mar'
Etc.[14]

[13] Caben, por tanto, tres posibilidades:

1.ª Usar, simplemente, una palabra (es decir, usarla sin mencionarla), como cuando decimos:
Las garzas no practican la autocrítica.

2.ª Usarla y a la vez mencionarla, usarla para mencionarla, como cuando decimos:
'Autocrítica' es una palabra que las garzas no emplean

3.ª Mencionarla *sin usarla*, como cuando decimos:
La palabra que sirve para designar la actividad mediante la cual alguien somete a crítica sus propias ideas o actuaciones no figura en el vocabulario de las garzas.

[14] El siguiente texto de Lewis Carroll proporciona una divertida muestra de jerarquización del lenguaje mediante una acumulación de menciones:

«Estás triste» —dijo el Caballero con tono de ansiedad—. «Permíteme que te cante una canción para reconfortarte».

. . . .

«El nombre de la canción se llama '*Haddock's Eyes*'.

«Así que ese es el nombre de la canción, ¿no?» —preguntó Alicia, intentando sentirse interesada.

«No, no me entiendes... Así es como *se llama* el nombre. El nombre en realidad es '*The Aged Aged Man*'».

«Entonces, lo que tendría que haber dicho» —dijo Alicia rectificando— «es que así es como se llama la canción, ¿no?»

Hasta el momento, y para simplificar, hemos venido hablando de uso y mención de las palabras. Habría ahora que generalizar y hablar del uso y la mención de expresiones —incluyendo no sólo palabras de todo tipo, sino también frases enteras, simples o compuestas. En realidad, cada vez que empleamos un metalenguaje estamos usando las expresiones de éste y, al propio tiempo, estamos usando y a la vez mencionando las expresiones del lenguaje-objeto de que se trate.

Sintaxis, semántica y pragmática

Tomemos las seis afirmaciones siguientes:

(1) *En la frase 'era del año la estación florida' hay un hipérbaton.*

(2) *Por 'conjunto vacío' se entiende, en teoría de conjuntos, el conjunto que carece de miembros.*

(3) *Benjamin Péret escribía a veces en un lenguaje especial en el que, por ejemplo, la palabra francesa* 'porte-feuilles' *significaría, traducida al castellano, 'estanque cubierto de nenúfares'.*

(4) *El orden de las palabras en 'de en Mancha la un lugar' no es el mismo que en el comienzo del* Quijote.

(5) *Alguien podría pensar que la palabra 'algoritmo' viene del griego 'ἄλγο ' ('dolor') y 'ἀριθμό ' ('número'), y que significa 'número doloroso', o bien 'dolor numérico'.*

(6) *Por increíble que pueda parecer, personas que pasan por peritos en psicoanálisis pronuncian la palabra 'libido' (del latín* libido-inis) *como si fuera esdrújula, y no llana.*

Después de lo dicho en el apartado anterior, no es difícil ver que en cada uno de estos seis ejemplos hay una expresión —'era del año la estación florida', 'libido', '*porte-feuilles*', etc.— que está a la vez usada y mencionada. Hemos usado esas expresiones para que se designaran a sí mismas, para hacer mención de ellas. Ahora bien: ¿con qué finalidad las hemos mencionado? Una lectura atenta de los seis ejemplos revela que en conjunto nos han guiado tres finalidades distintas, una por cada dos ejemplos. En los casos 1 y 4 hemos mencionado sendas sartas de palabras para hablar acerca de las relaciones entre ellas, para hablar de ellas sin salirnos del lenguaje, por así decir. En los casos 2 y 5, hemos mencionado una expresión para relacionarla con lo que ella designa. Por último, en los casos 3 y 6 hemos mencionado una expresión para relacionarla con los sujetos que la utilizan.

«¡No! ¡Es algo totalmente distinto! La canción se llama '*Ways and Means*'; pero eso es sólo lo que se le *llama*».

«Bien. Entonces, ¿cuál es la canción?» —dijo Alicia, que a estas alturas estaba ya completamente aturdida.

«A eso iba» —dijo el Caballero—. «En realidad, la canción es '*A-sitting On A Gate*'...»

Denominamos «*semiótica*» a la ciencia que se ocupa del estudio de los signos, o de los lenguajes en cuanto sistemas de signos. La semiótica se divide en *sintaxis*, *semántica* y *pragmática*. La *sintaxis* será el puro estudio de las relaciones de los signos entre sí, la teoría de la construcción e identificación de las secuencias de signos bien formadas: al decir, por ejemplo, que la sarta de palabras 'de en Mancha la un lugar' está mal ordenada, estamos haciendo una observación de carácter sintáctico. La *semántica*, por su parte, será la disciplina que se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello que éstos designan, entre los signos y aquello de lo cual hablamos por medio de ellos (entre los nombres propios y las entidades individuales a que se refieren, o entre los enunciados y los hechos que pretenden describir, por ejemplo): cuando decimos que la palabra 'algoritmo' no significa 'dolor numérico' estamos haciendo semántica de esa expresión. Finalmente, la *pragmática* sería aquel tipo de indagación semiótica en la que entra también en juego la consideración de las relaciones entre los elementos de un lenguaje y los sujetos —individuos o comunidades lingüísticas— que emplean ese lenguaje como medio de comunicación. Así pues, cuando estamos haciendo *pragmática* nos interesamos por el lenguaje en cuanto forma de conducta, en cuanto actividad de un sujeto o de un grupo de sujetos. En *semántica*, sin embargo, hacemos abstracción del hablante, y nos limitamos a examinar la relación entablada entre los signos que componen un lenguaje y aquellas entidades a las que esos signos, precisamente por serlo, apuntan: una palabra designará, por ejemplo, un tipo de fenómeno atmosférico, otra un sentimiento, una tercera nombrará a un famoso asesino. En *sintaxis*, por último, hacemos abstracción de todo aquello que no sea la pura materialidad de los signos, a fin de poder estudiar las nudas relaciones entre ellos: prescindimos del sujeto hablante, prescindimos también de la referencia de las expresiones a algo ajeno a ellas; nos limitamos a considerar aisladamente la estructura de las cadenas de signos, y decimos, por ejemplo, que en la cadena de signos 'era del año la estación florida' hay un hipérbaton, una alteración —poética— del orden habitual de las expresiones.

Es tarea propia de la sintaxis la construcción de cálculos.
¿A qué llamamos un cálculo?

La noción de cálculo

«Podemos considerar nuestro lenguaje como una ciudad antigua: un laberinto de pequeñas calles y plazas, de casas viejas y nuevas, y de casas con añadidos que datan de épocas distintas; y todo esto rodeado de una multitud de barrios nuevos con calles rectas regularmente trazadas y casas uniformes»[15]. Un poco antes, en este mismo

[15] Wittgenstein: *Philosophische Untersuchungen*, núm. 18.

párrafo, ha dicho Wittgenstein que el simbolismo de la química o la notación del cálculo infinitesimal, por ejemplo, son «suburbios de nuestro lenguaje».

La distinción entre lenguajes naturales y lenguajes artificiales es a primera vista muy clara. Los lenguajes naturales los heredamos. Los lenguajes artificiales los construimos. Los lenguajes naturales son las lenguas, creadas y recreadas constantemente por la especie en el transcurso de muchos siglos y transmitidas a cada individuo en el transcurso de pocos años. Los lenguajes naturales son los que hablamos todos los días, esos complejos instrumentos de comunicación que sólo las gramáticas generativas parecen hoy capaces de describir de modo relativamente adecuado, esos lenguajes que, dicho de manera rudimentaria, se componen, *en el fondo*, de un léxico —finito— y de un conjunto de reglas que permiten combinar hasta el infinito los elementos de ese léxico[16]. Los lenguajes son, según diría Wittgenstein, «una forma de vida». Hablar es parte de nuestra historia natural como pasear, como beber o como jugar[17]. Por eso, por ser tan natural e inevitable, por constituir un componente tan profundo de nuestro comportamiento, por esa razón es el lenguaje tan huidizo, tan difícil de comprender, de aislar, de cercar científicamente.

Pero en rigor —y la metáfora de Wittgenstein apunta verosímilmente a este hecho— los lenguajes naturales han sido también construidos. Sólo que construimos a ritmo lento, a lo largo de la secular relación del hombre con su medio: su riqueza, su ambigüedad, su infinitud de matices no son sino el reflejo de la riqueza de esa relación. Y un producto de esa relación —un resultado de la necesidad de controlar científicamente el medio— son también los lenguajes artificiales. Lo que laxamente estamos llamando 'lenguajes artificiales' son por lo general lenguajes de precisión, medios artificiosos de expresión construidos por los científicos a fin de poder formular con mayor justeza las relaciones entre los objetos estudiados por sus ciencias respectivas. Hablar, como hemos visto, es esencialmente recrear el lenguaje. La explotación de esta posibilidad de recreación constante que el lenguaje ofrece se manifiesta de una manera pura y premeditada en la tarea de los constructores de lenguajes con fines científicos[18]. Los constructores de lenguajes artificiales no hacen sino

[16] «Una proposición debe usar expresiones viejas para transmitir un sentido nuevo» (Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.03.)

[17] *Philosophische Untersuchungen*, núms. 19, 25.

[18] Y también, en un plano distinto, en la de los artistas del lenguaje, los escritores. Si, como dicen los lingüistas, «la información aportada por una unidad lingüística es la inversa de la probabilidad de aparición de esta unidad en el discurso»; si, por lo tanto, la información que un hablante es capaz de proporcionarnos está en función de su pericia en el empleo de palabras o construcciones inesperadas, diremos que nos informa menos quien nos hace saber, por ejemplo, que la hulla es negra que quien, como Pablo Neruda, nos comunica que la hulla es «el total reverso de la nieve».

encauzar, dirigir, prolongar el lenguaje en beneficio de las distintas ciencias, orientando sistemáticamente en un determinado sentido las posibilidades de expansión continua que el lenguaje lleva en su seno como su rasgo más peculiar y profundo.

Nos preguntábamos antes: ¿a qué llamamos un cálculo?

Los cálculos son, naturalmente, artificiales. Los cálculos no son, propiamente, lenguajes. Un cálculo es una pura estructura, un sistema de relaciones. Un cálculo se compone de lo siguiente:

1. Un conjunto de elementos primitivos, llamados a menudo «símbolos elementales». Ellos constituyen, como veremos, las piezas a manejar dentro del sistema. Es absolutamente esencial señalar que este conjunto de símbolos primitivos ha de estar definido de un modo efectivo. Un conjunto está definido de manera efectiva cuando podemos decidir, ante un objeto cualquiera, si ese objeto es o no es miembro del conjunto en cuestión. Por ejemplo, el conjunto de los librepensadores que habitan en nuestra Submeseta Sur no es un conjunto definido de una manera efectiva: hay muchos casos que platearían serias dudas.

Para definir un conjunto de una manera efectiva tenemos dos procedimientos: *a*) Enumerar exhaustivamente los elementos de ese conjunto: {2, 4, 6, 8, 10}, por ejemplo. Este procedimiento resulta extremadamente laborioso cuando los elementos del conjunto son muchos y variados, y resulta inaplicable cuando los elementos del conjunto son infinitos, como ocurre, por ejemplo, en el caso del conjunto de los números naturales. *b*) Definir el conjunto por medio de una propiedad lo suficientemente precisa como para permitir una decisión en el sentido indicado: «El conjunto de los enteros positivos pares menores que 12».

2. Un conjunto de reglas —«reglas de formación» o «de construcción»— que establecen cuáles son las combinaciones correctas posibles de esos símbolos elementales. El conjunto de las reglas de formación ha de proporcionar una definición efectiva de la noción de 'expresión bien formada del cálculo', de tal modo que sea posible, ante cualquier combinación de símbolos, decidir si es o no una fórmula bien construida. En los lenguajes naturales hay también reglas de formación que permiten combinar los elementos del vocabulario para componer con ellos oraciones. Lo que ocurre es que en los lenguajes naturales esas reglas no están formuladas: el hablante de una lengua las aplica implícitamente, y sólo se hacen explícitas —sistemáticamente— cuando se elabora la gramática de esa lengua, o bien —ocasionalmente— cuando alguna construcción le resulta «extraña» al hablante y le incita a preguntarse por las reglas que le permitirían calificarla de correcta o incorrecta.

Para un hablante del castellano es fácil ver —aunque no tan fácil explicar— que una oración como 'La heroica ciudad dormía la siesta' (Clarín) está bien construida. También le es fácil ver que una sarta de vocablos como 'so beneplácito burócratas empero metempsicosis singularizas' está mal construida. ¿Qué decir, sin embargo, de expresiones como 'las cariátides estructuraron batipelágicamente los sintagmas monofisitas'? Desde el punto de vista sintáctico, la expresión es impecable. Esperamos, sin embargo, que la mayoría de los lectores convenga con nosotros en que carece de sentido. Las reglas de formación de oraciones en los lenguajes naturales, sobre estar implícitas, son defectivas —y no efectivas—, en el sentido de que permiten la entrada de expresiones que ningún hablante aceptaría como ejemplos de uso natural del lenguaje y que, sin embargo, están correctamente construidas. Por otra parte, la transgresión de las reglas de los lenguajes naturales tiene —estéticamente, por ejemplo— perfecto sentido. Así, Chomsky habla del «estudio de la desviación de las reglas como medio estilístico».

3. Un conjunto de «reglas de transformación». Aplicándolas, podemos transformar una combinación bien construida de símbolos en otra combinación que resultará igualmente bien construida. Como los conceptos de símbolo primitivo y de fórmula o expresión bien formada, el concepto de transformación ha de quedar definido de una manera efectiva, en el sentido de que ha de ser posible en todos los casos dictaminar si una transformación ha sido efectuada correctamente.

Los lógicos han comparado a menudo los cálculos con los juegos, sobre todo con el del ajedrez. En efecto: los símbolos primitivos corresponderían a las piezas del juego. Dado un objeto cualquiera podríamos decidir si se trata o no de una pieza de ajedrez: ante una máquina de vapor, por ejemplo, diríamos que no. Las reglas de formación corresponderían a las instrucciones sobre las posiciones que pueden ocupar las piezas: una pieza situada en la palma de una de las manos de un Buda del siglo IX no es una pieza en juego. Las reglas de transformación serían como las reglas sobre los movimientos que se pueden efectuar con las piezas: asomarse a un amplio ventanal y arrojar desde él un alfil al mar Adriático no sería un movimiento del ajedrez.

Los cálculos y los juegos se parecen en que son autárquicos, en que ni unos ni otros hacen referencia a nada ajeno a ellos, en que unos y otros carecen de otra finalidad que no sea calcular o jugar. En ambos casos establecemos unas reglas para combinar unos ciertos elementos: no atenerse a las reglas significa simplemente dejar de operar con ese determinado cálculo, «salirse del juego». Lo esencial de un cálculo es su carácter exclusivamente formal. Dicho de otro modo: su naturaleza puramente sintáctica. En efecto: acerca de un cálculo sólo se pueden hacer —en el metalenguaje, por supuesto— consideraciones de pura sintaxis: «La expresión 'X' está mal formada», «La transformación de la expresión 'X' en la expresión 'Y' es correcta», etc.

Un cálculo no es, por lo tanto, un lenguaje, en la medida en que no es un medio de comunicación, sino un puro armazón sintáctico. Sus

elementos carecen de significado. No son signos, sino entidades opacas que manipulamos de acuerdo con una serie de reglas.

Podemos, sin embargo, transformar un cálculo en un lenguaje. ¿Cómo? *Interpretando* sus símbolos, proveyendo a sus símbolos de un significado. Tomemos un ejemplo extremadamente simple.

Describamos un cálculo:

1. Símbolos primitivos

A) ◬ ◬ ◬ ◬ ◬ etc

Es decir, triángulos con un número cualquiera de puntos en su interior.

B) ⊙ ⊙ ⊙ ⊙ ⊕ etc.

Es decir, cículos con un número cualquiera de puntos en su interior.

C) Una operación, que escribiremos 'Ɩ', mediante la cual ponemos en relación los elementos de *A* con los de *B* o viceversa.

2. Reglas de formación

RF1: Un triángulo solo con un número cualquiera de puntos en su interior es una expresión bien formada del cálculo.

RF2: Un círculo solo con un número cualquiera de puntos en su interior es una expresión bien formada del cálculo.

RF3: Una expresión compuesta por un símbolo cualquiera de tipo *A*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de una expresión cualquiera de tipo *B* es una expresión bien formada.

RF4: Una expresión compuesta por un símbolo cualquiera de tipo *B*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de un símbolo cualquiera de tipo *A* es una expresión bien formada.

RF5: Nada es una expresión bien formada a no ser en virtud de las reglas 1-4.

3. Reglas de transformación

RT1

RT1 *a*: Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo *A*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de un símbolo determinado de tipo *B*, podemos transformarla en otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo *B*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de ese símbolo determinado de tipo *A*.

RT1 *b*: Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo *B*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de un símbolo determinado de tipo *A*, podemos transformarla en otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo *A*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de ese símbolo determinado de tipo *B*[19].

RT2

RT2 *a*: Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo *A*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de un símbolo determinado de tipo *B*, se puede pasar a otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo *A*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de otro símbolo cualquiera de tipo *B*.

RT2 *b*: Dada una fórmula compuesta por un símbolo determinado de tipo *B*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de un símbolo determinado de tipo *A*, podemos pasar a otra fórmula compuesta por ese símbolo determinado de tipo *B*, seguido del símbolo 'Ɩ' y de otro símbolo cualquiera de tipo *A*.

A la vista de lo anterior, y dado un símbolo como

⟐

podemos decidir si es o no un elemento primitivo del sistema. Evidentemente, no lo es.

En cambio, un símbolo como

◬

es un símbolo primitivo del sistema, y también, por la RF1, una fórmula bien formada del sistema.

Una combinación de símbolos como

◬Ɩ

o como

Ɩ⊙

no será una fórmula bien formada (una fórmula, a secas) del sistema. Sí lo será, en cambio, por la RF3; una expresión como

◬Ɩ⊕

[19] La regla RT1 podría resumirse diciendo que la operación 'Ɩ' tiene la propiedad conmutativa.

Por otra parte, dada una combinación de símbolos como

△ Ĩ ⊖

que es una expresión bien formada, podemos pasar de ella a

⊖ Ĩ △

por la regla RT1 *a*.

O también, dada una fórmula como

◬ Ĩ ⊙

podemos, por la regla RT2 *a*, transformarla en otra fórmula como

◬ Ĩ ⊖ Etcétera.

Hasta aquí lo único que hemos hecho es explicar el manejo de un cálculo; un cálculo, como ya hemos dicho, extraordinariamente simple y rudimentario, un cálculo de salón. No obstante, esperamos que valga para hacer ver que operar con un cálculo no es otra cosa que manipular un conjunto de entidades —manchas de tinta, por ejemplo, o de tiza— según unas reglas establecidas explícitamente de antemano.

Podemos, sin embargo, como hemos dicho, *interpretar* el cálculo. Podemos decir, por ejemplo: los triángulos designarán individuos humanos cualesquiera del sexo masculino. Los círculos designarán individuos humanos cualesquiera del sexo femenino. El símbolo Ĩ designará la operación 'contraer matrimonio'.

Tendremos, entonces, que una expresión como

◬ Ĩ ⊖

se interpretará como

'el varón Tal contrae matrimonio con la mujer Cual'.

El paso de una expresión como

⊖ Ĩ ◬

a una expresión como

⊖ Ĩ ◬

autorizado por RT2 *b*, significará

'la mujer Tal ha pasado de estar casada con el varón Tal a estarlo con el varón Cual'.

Ahora ya no estamos manejando un puro cálculo. Al haber interpretado sus símbolos hemos convertido el cálculo en un lenguaje. No se trata, sin embargo, de un lenguaje como el castellano, el bantú o el servo-croata. No se trata de un lenguaje natural, sino de un *lenguaje formalizado*, un lenguaje *con estructura de cálculo*, un lenguaje en el que no sólo es artificial el vocabulario, sino también —y esto es lo esencial— la sintaxis. Hemos formalizado —si bien de una forma muy tosca— las relaciones matrimoniales en un grupo humano donde está admitido el divorcio a voluntad[20].

Así pues, aunque en la práctica los cálculos se construyen a menudo pensando en sus posibles aplicaciones —o incluso en una aplicación concreta—, hay que señalar que, desde el punto de vista teórico, son absolutamente independientes del lenguaje o lenguajes formalizados que se puedan obtener interpretándolos.

Hay quienes piensan que la lógica es un conjunto de cálculos, o bien que la lógica es la teoría de la construcción de cálculos.

Nosotros entenderemos la lógica como un conjunto de lenguajes formalizados, es decir, como un conjunto de cálculos a los que se da una interpretación en el campo de investigación que —desde Aristóteles, por lo menos— constituye el objeto de la lógica. De entre todos los cálculos que podemos construir hay algunos que por su especial estructura y su buen rendimiento son particularmente aptos para ser aplicados a un ámbito específico de problemas, el ámbito de los problemas lógicos. La lógica, que durante más de veinte siglos ha consistido en una suma mal organizada de reflexiones acerca de las reglas formales del razonamiento, expresadas casi siempre en el lenguaje natural, constituye, en su forma contemporánea, la presentación formalizada de nuestro conocimiento acerca de ese determinado tema.

La idea de lógica formal

Algunos psicólogos han señalado[21] que, en el curso de su desarrollo psíquico, el niño atraviesa una etapa caracterizada, entre otros rasgos,

[20] Repárese en que en ese grupo humano está procrita la poligamia, entendida en su sentido habitual, es decir, como poligamia «sincrónica», puesto que ningún símbolo de tipo A o B puede estar conectado con más de un símbolo de tipo B o A. Estaría admitida, en cambio, la que podríamos llamar «poligamia diacrónica», en la medida en que cualquier individuo de esa comunidad podría cambiar de cónyuge con la periodicidad que su volubilidad afectiva le dictara. En la citada comunidad estaría prohibido asimismo el matrimonio entre personas del mismo sexo, pues ninguna regla de formación autoriza la construcción de expresiones como ◬ Ĩ ◬. A cambio, no existiría el tabú de incesto.

Por lo demás, si atribuyéramos al símbolo Ĩ el significado 'mantener relaciones castas previas al matrimonio' obtendríamos una interpretación del cálculo distinta de la anterior: habríamos formalizado la versión oficial de las relaciones preparatorias del matrimonio en una sociedad como la nuestra, por ejemplo.

[21] Para la exposición y discusión de dichas teorías véase el libro de Juan A. del Val *El animismo y el pensamiento infantil*. Madrid, Siglo XXI Ed., 1975.

por la presencia de una «orientación de espíritu» animista, entendiendo por animismo la atribución de vida y conciencia a objetos inanimados. Ahora bien: de todos es sabido que muchas de las características tenidas por exclusivas de la mentalidad infantil —el egocentrismo (tanto epistemológico como moral), por ejemplo— no desaparecen con la edad, sino que persisten en el adulto bajo formas a veces más refinadas. Cuando alguien, en su delirio, habla de «física aria» y «física judía», o —dando a cada cual lo suyo, según el viejo principio del derecho romano— de «ciencia proletaria» y «ciencia burguesa»; cuando alguien, en concreto, emite una sarta de sonidos medianamente articulados que podría interpretarse en el sentido de que la lógica es una ciencia contrarrevolucionaria (!), estamos en presencia de una conducta animista de la mejor ley. La lógica no es ni un baluarte de la reacción ni una palanca para la edificación del socialismo. La lógica es una ciencia, y las ciencias son, *en principio*, entidades políticamente disponibles, instrumentos o medios de los que podemos servirnos con diversos fines.

Son muchas las definiciones que podrían darse y se han dado de la lógica. Nosotros hemos elegido la siguiente: la lógica es *la ciencia de los principios de la validez formal de la inferencia.* Evidentemente, es preciso explicar esta definición término a término.

Inferencia. Como es bien sabido, los sinónimos no existen. Pese a ello, nos permitiremos considerar el término 'inferencia' como sinónimo de 'razonamiento' o 'argumentación'. Todo razonamiento es pensamiento, pero la inversa no es verdadera: no todo acto de pensamiento consiste en razonar. El razonamiento es, pues, un tipo de pensamiento junto a otros varios que la psicología distingue. Un tipo de pensamiento cuyo rasgo característico es que en él se produce siempre el paso de una o más afirmaciones que tomamos como punto de partida a una afirmación que se sigue de aquellas. Lo específico, por tanto, de un razonamiento o inferencia es que consiste en derivar una *conclusión* a partir de unas *premisas*. Eso es razonar. Recordar, por ejemplo, o imaginar son también formas de pensamiento, pero no formas de razonamiento.

Ahora bien: es menester distinguir entre el razonamiento como actividad de un sujeto —el acto de razonar— y el razonamiento en cuanto producto o resultado de esa actividad. Del razonamiento en la primera acepción se ocuparía la psicología del pensamiento en uno de sus capítulos. El razonamiento como resultado —como resultado plasmado en el lenguaje, según veremos— es el objeto *material* —es decir, compartible con otras ciencias— de la lógica.

Validez formal. Puesto que lo que constituye un razonamiento es la relación que en él se da entre unos enunciados que se toman como premisas y otro enunciado que resulta como conclusión, parece razonable dividir los razonamientos según la índole de esa relación. Según la índole

de esa relación los razonamientos se dividen en razonamientos válidos y razonamientos no válidos. Y cuando aquí decimos 'razonamiento válido' queremos decir, en un sentido que explicaremos pronto, 'razonamiento *formalmente* válido'.

En el lenguaje ordinario se emplean a menudo expresiones como 'no me parece compatible con lo anterior decir ahora que...', 'después de haber defendido tal cosa, no me sorprende que ahora defienda tal otra', '¿qué tiene de extraño, a la vista de tales acontecimientos, que...?', 'no es *lógico* que...', y otras muchas por el estilo. Hablamos también a veces de «coherencia», «consecuencia», «lógica interna», etc. El uso de expresiones de este tipo parece sugerir la idea de que en el pensamiento natural está implícita una distinción entre *verdad* y *validez*, entre, por una parte, la validez —la corrección formal— de un razonamiento, y, por otra parte, el hecho de que sus premisas, su conclusión, o ambas, sean verdaderas.

Ya que se trata de tres elementos a considerar —validez o no validez del razonamiento, verdad o falsedad de las premisas, y verdad o falsedad de la conclusión— imaginemos una tabla de triple entrada:

VALOR DE VERDAD DE LAS PREMISAS	VALOR DE VERDAD DE LA CONCLUSION: VERDADERA	FALSA	NATURALEZA DEL RAZONAMIENTO
VERDADERAS	1	2	NO VALIDO
FALSAS	3	4	NO VALIDO
FALSAS	5	6	VALIDO
VERDADERAS	7	8	VALIDO

Veamos un ejemplo de cada tipo[21]:

De tipo 1 (premisas y conclusión verdadera; razonamiento no válido):

Si San Pablo era monoteísta, entonces Sócrates y Yantipa no contrajeron matrimonio por el rito ortodoxo griego.
Es así que Sócrates y Yantipa no contrajeron matrimonio por el rito ortodoxo griego

Luego
San Pablo era monoteísta

[21] Para simplificar, en los ejemplos que siguen todos los razonamientos tendrán dos premisas.
Téngase presente, por otra parte, que, como veremos, para que el *conjunto* de las premisas sea falso basta con que lo sea *una sola de ellas*.

De tipo 2 (premisas verdaderas; conclusión falsa; razonamiento no válido):

> Algunos poetas escribieron también libros de ensayo
> Catulo era poeta.
> Luego
> Catulo escribió libros de ensayo.

De tipo 3 (premisas falsas; conclusión verdadera; razonamiento no válido):

> Todos los psicólogos conductistas son partidarios del psicoanálisis.
> Watson era partidario del psicoanálisis.
> Luego
> Watson era partidario del conductismo.

De tipo 4 (premisas falsas; conclusión falsa; razonamiento no válido):

> Si Ricardo Strauss compuso *Metamorfosis*, entonces Mahler es autor de *El buque fantasma*.
> Es así que Ricardo Strauss no compuso *Metamorfosis*.
> Luego
> Mahler es autor de *El buque fantasma*.

De tipo 5 (premisas falsas; conclusión verdadera; razonamiento válido):

> Todos los revolucionarios usan uniforme.
> Mussolini no usaba uniforme.
> Luego
> Mussolini no era revolucionario.

De tipo 6 (premisas y conclusión falsas; razonamiento válido):

> Si Lewis Carroll es el autor de la *Imitación de Cristo*, entonces Stalin fue un famoso teólogo de la Contrarreforma.
> Es así que Lewis Carrol es el autor de la *Imitación de Cristo*.
> Luego
> Stalin fue un famoso teólogo de la Contrarreforma.

De tipo 7 (premisas y conclusión verdadera; razonamiento válido):

> Todo número entero positivo es divisible por 1.
> 7 es un número entero positivo.
> Luego
> 7 es divisible por 1.

De tipo 8 (premisas verdaderas; conclusión falsa; razonamiento válido):

. . . .

No existen razonamientos de tipo 8: no hay razonamientos *válidos* que tengan premisas verdaderas y conclusión falsa. Y ello porque precisamente se dice que un razonamiento es válido cuando, *si* sus premisas son verdaderas, necesariamente su conclusión lo es también. El razonamiento

que hemos puesto como ejemplo de los de tipo 6 es un razonamiento válido, pese a que sus premisas y su conclusión sean falsas. Por su parte, el razonamiento que hemos puesto como ejemplo de los de tipo 1 es no-válido, aun cuando sus premisas y su conclusión sean verdaderas. ¿Por qué es válido el razonamiento que hemos dado como muestra de los de tipo 6? Porque *si* sus premisas *fueran* verdaderas, *entonces* también lo *sería* su conclusión. Los ejemplos que hemos inventado intentan ilustrar la siguiente idea (una idea tan importante que sin poseerla es imposible entender qué es la lógica formal): la idea de que la validez de un razonamiento es *independiente* de la verdad o falsedad de sus premisas y su conclusión. Puede haber —lo hemos visto— razonamientos cuyas premisas y cuya conclusión sean verdaderas y que, sin embargo, sean no-válidos. Y puede haber razonamientos que sean válidos, pero que tengan premisas y conclusión falsas. Lo decisivo es comprender que un razonamiento es válido cuando es imposible que, siendo verdaderas sus premisas, sea falsa su conclusión. Que las premisas sean *de hecho* verdaderas o no lo sean, es otra cuestión; una cuestión que cae fuera de la lógica. Averiguar si es verdad que Lewis Carroll escribió la *Imitación de Cristo* no es cosa de la lógica, sino de la historia de la literatura piadosa. Que el 7 es un número entero positivo sólo podemos saberlo sabiendo aritmética. Para comprobar que Catulo no escribió libros de ensayo hemos de recurrir a los estudiosos de la literatura latina, y no a los cultivadores de la lógica. Estudiar lógica no consiste en estudiar si tales o cuales enunciados —relativos a tal o cual materia— son efectivamente verdaderos. Estudiar lógica consiste en estudiar qué otros enunciados, dados los anteriores como verdaderos, habría que aceptar como verdaderos también. La noción fundamental, constituyente, de la lógica no es la de verdad *material*, la de verdad de hecho, sino la de *coherencia*[22]. La lógica no se ocupa de verdades materiales, sino de las relaciones formales entre ellas. Por eso hemos dicho antes que, en lógica, la expresión 'razonamiento válido' es una abreviatura de 'razonamiento *formalmente válido*'. Por eso en nuestra definición de lógica —la definición que estamos reconstruyendo— hemos hablado de 'validez *formal*'.

Todo razonamiento tiene una forma y un contenido; una estructura, y un asunto de que trata. Los dos razonamientos siguientes:

> Si todos los esquizofrénicos son psicóticos y todos los psicóticos son personas desdichadas, entonces los esquizofrénicos son personas desdichadas.

[22] Esto está claro incluso para quienes, como André Breton, disfrutaron de una información más bien precaria acerca de esta ciencia: «En lo que llamamos lógica [nótese que Breton debiera haber entrecomillado la palabra 'lógica', puesto que en este contexto aparece mencionada y no sólo usada] sólo veo el culpable ejercicio de una debilidad. Puedo decir, sin ninguna afectación, que lo que menos me preocupa es sentirme consecuente conmigo mismo» (*Les pas perdus*).

y

Si todos los santos son creyentes y todos los creyentes se muestran reacios a la desamortización, entonces todos los santos se muestran reacios a la desamortización

son, obviamente, distintos por su contenido. Su forma, sin embargo, es la misma. Esa forma, toscamente representada, sería, en ambos casos, ésta:

Si todos los... son... y todos los... son..., entonces todos los... son...,

o, mejor,

Si todos los *a* son *b* y todos los *b* son *c*, entonces todos los *a* son *c*,

donde '*a*', '*b*' y '*c*' son, como veremos, *variables* que indican el lugar posible de un contenido, de *cualquier* contenido de un cierto tipo: en lugar de '*a*', por ejemplo, podemos escribir 'esquizofrénicos' o 'santos', o 'corsarios' o 'filósofos', o cualquier otro término general.

La noción de forma de un razonamiento puede ilustrarse por analogía con las formas musicales. La misma relación habría entre, por una parte, una forma de razonamiento y, por otra parte, los infinitos razonamientos distintos —distintos por su contenido— que podrían hacerse con esa forma —*de esa forma*—, que entre la forma *soneto*, por ejemplo, y los infinitos poemas —elegíacos, satíricos, de amor, etc.— escritos en forma de soneto, o que entre la forma *sonata* y las diferentes sonatas que nos es dado escuchar.

A la lógica le importa únicamente la forma de los razonamientos. La lógica es lógica *formal*, ciencia de las formas o esquemas válidos de razonamiento. ¿A qué llamamos una forma válida de razonamiento? A un esquema de inferencia tal que, dado cualquier razonamiento que podamos hacer interpretando las variables de ese esquema, si las premisas del razonamiento son verdaderas, entonces necesariamente la conclusión será verdadera también. El esquema

Si todos los *a* son *b* y todos los *b* son *c*, entonces todos los *a* son *c*

es un esquema válido porque, sean cuales fueren los términos generales con que sustituyamos[23] las variables *a*, *b* y *c*, si es verdad que todos los *a* son *b* y que todos los *b* son *c*, necesariamente ha de ser verdadero el enunciado 'todos los *a* son *c*'. En un razonamiento válido —formalmente válido, *lógicamente* (hora ya podemos decirlo así) válido—, la verdad

[23] Se supone que la sustitución ha de estar bien hecha, es decir, que la variable '*a*', por ejemplo, será sustituida, en el mismo contexto, siempre por el mismo término.

de la conclusión se sigue necesariamente de la verdad de las premisas, *en virtud de la sola forma de éstas*. En los *Analíticos Primeros*[24], Aristóteles define el silogismo como aquel discurso (λόγος) en el que, afirmadas ciertas cosas, por el simple hecho de haberlas afirmado se sigue necesariamente otra cosa distinta de ellas. Ahora bien: el silogismo es sólo un tipo de esquema válido de inferencia, entre otros muchos, y la definición aristotélica no se aplica sólo al silogismo, sino a todo razonamiento formalmente válido[25].

De esa definición nos interesa ahora sobre todo retener la expresión 'necesariamente' (ἐξ ἀνάγκης). En efecto: lo esencial en todo razonamiento formalmente válido es la relación de *necesidad* que se establece entre premisas y conclusión, de tal modo que la verdad de las primeras acarrea inevitablemente la verdad de la segunda.

Es evidente que no en todo razonamiento se da esta conexión necesaria. Hay ocasiones en las que la conclusión se deriva de las premisas no de una manera necesaria, no inexorablemente, sino sólo con un mayor o menor grado de probabilidad. Así, por ejemplo, en una inferencia como

Si la concepción ondulatoria de la luz es correcta, entonces la luz se moverá a mayor velocidad en el aire que en el agua.
Es así que, como mostró el experimento de Foucault, la velocidad de la luz es mayor en el aire que en el agua.

Luego
....

De las premisas no se sigue *necesariamente* que la concepción ondulatoria de la luz sea correcta, e incorrectas las concepciones rivales —en este caso, la concepción corpuscular. La segunda premisa únicamente añade mayor apoyo empírico a esa concepción; la confirma (pero no de un modo concluyente), la hace más probable, más plausible.

De igual modo, de las premisas

El ochenta por ciento de los campesinos andaluces en 1933 eran anarco-sindicalistas
Antonio Jiménez era en 1933 un campesino andaluz,

sólo podríamos concluir —en el caso de que fueran verdaderas— que es probable —si bien en muy alto grado— que Antonio Jiménez fuera anarco-sindicalista.

Hay, pues, de una parte, razonamientos formalmente válidos, en los que la conclusión se sigue *necesariamente* de las premisas, de tal modo

[24] 24 b 18 y ss.

[25] De hecho, en una obra que, según todos los indicios, está escrita con anterioridad a los *Analíticos*, los *Tópicos* (100 a 25), Aristóteles de esta misma definición sin restringirla al silogismo.

que sería contradictorio afirmar las primeras y negar la segunda (con otras palabras: sería imposible imaginar circunstancias que, haciendo verdaderas las premisas, hicieran falsa la conclusión)[26]; y hay, de otra parte, razonamientos en los que la verdad de las premisas no conduce fatalmente a la verdad de la conslusión, sino sólo —y de múltiples y complicadas maneras, como han mostrado los análisis de los metodólogos de la ciencia empírica y de los psicólogos del razonamiento— a su mayor o menos probabilidad. A los razonamientos del primer tipo —aquellos que son válidos por su sola forma— se les llama a menudo «razonamientos *deductivos* (válidos)», otorgándose a los del segundo los nombres de «razonamientos inductivos», «probabilísticos», «plausibles» y otros muchos que señalan, frente a la relativa simplicidad de la inferencia deductiva, la todavía inabarcada complejidad de esta última clase de razonamientos.

Principios. Según tendremos ocasión de ver, en lugar de hablar de «principios» podíamos haber hablado de *leyes* o de *reglas.* Ya hemos visto cómo en el lenguaje común existen una serie de expresiones y giros que se utilizan para estimar formalmente —es decir, en términos de pura coherencia, y con abstracción del posible valor de verdad de los enunciados que lo componen— cualquier razonamiento. La lógica pretende llevar a cabo esa estimación o valoración de una manera estructurada; la lógica pretende codificar los principios que guían el análisis de la validez formal de los razonamientos, sistematizar un conjunto de leyes o de reglas para el estudio de las condiciones formales en las que un enunciado se puede inferir válidamente a partir de otro.

Ciencia. La lógica es una ciencia. Y una ciencia *formal.* Dicho de otro modo: una ciencia *deductiva.* Toda ciencia es un sistema de enunciados.

[26] Lewis Carroll, en su *Symbolic Logic*, lo explica muy plásticamente. Tomemos un razonamiento como:

> «Nadie que quiera tomar el tren y que no pueda coger un taxi y que no tenga tiempo suficiente para ir dando un paseo hasta la estación puede tomarlo sin echar a correr.
> Este grupo de turistas quiere tomar el tren y no puede coger un taxi, pero les sobra tiempo para ir hasta la estación dando un paseo.
> Este grupo de turistas no necesita correr.»

Aparentemente, se trata de un razonamiento formalmente correcto. No es así, sin embargo. Veamos cómo lo explica Carroll:

> «He aquí, amable lector, otra oportunidad de hacerle una jugarreta a un amigo cándido. Preséntele este silogismo y pregúntele qué opina de la conclusión.
> El replicará: «¿A qué viene esa pregunta? Desde luego, es perfectamente correcta. Y si tu precioso libro de lógica te dice que *no lo es*, no hagas caso. No pretenderás decirme que esos turistas *necesitan* echar a correr, ¿verdad? Si yo fuera uno de ellos y supiera que las *premisas* son verdaderas, vería *completamente* claro que no *necesito* hacerlo. Y *me iría dando un paseo*».
> Y *usted* le replicará: «Pero supongamos que le persiguiera un toro demente».
> Entonces su cándido amigo dirá: «Hum. ¡Ah! Tengo que pensarlo un rato».
> Puede usted entonces explicarle que hay un modo de comprobar la corrección de un silogismo, y es éste: si es posible imaginar circunstancias que, sin interferir en la verdad de las premisas, hagan falsa la conclusión, el silogismo *tiene que ser* incorrecto».

La lógica, por tanto, también lo es, pero con la peculiaridad de que sus enunciados están deductivamente trabados. En lógica, como veremos, hay axiomas y teoremas —o bien, reglas básicas y reglas derivadas de inferencia—, y estos últimos —o estas últimas— se deducen, se siguen formalmente de los primeros —de las primeras. Las verdades lógicas —cada una de las cuales no es sino el enunciado de un modelo válido de inferencia— están organizadas en un sistema deductivo: es decir, que algunas de ellas se toman como primitivas, y de ellas se extraen las restantes *por deducción.*

Ahora bien: la lógica es la teoría formal del razonamiento, el estudio de la argumentación formalmente válida, la ciencia de la inferencia deductiva. Hablar de un razonamiento formalmente válido es como hablar de un razonamiento deductivamente válido, pues la conexión entre premisas y conclusión sólo es necesaria —sólo es deductiva— cuando es la pura forma de las premisas la que nos arrastra a la conclusión. Nos encontramos, entonces, con que la lógica, que es la ciencia de la deducción, es a su vez una ciencia organizada deductivamente, una ciencia cuyos enunciados —es decir, las verdades lógicas, cada una de las cuales expresa un modo válido de razonamiento— están ligadas por deducción, se deducen unos de otros. Resulta, pues, que la lógica es una ciencia «reflexiva», una ciencia que se dobla, que se vuelve sobre sí misma: es la ciencia deductiva de la deducción, la ciencia formal de la validez formal de las inferencias. Es una ciencia que se rige por los mismos principios que estudia.

Ni que decir tiene que la lógica, en el transcurso de su larga y sinuosa historia, ha tenido a menudo conflictos fronterizos con algunas otras disciplinas, o incluso ha sido, pura y simplemente, confundida con ellas: con la psicología del razonamiento[27], con la teoría de la ciencia[28], con la teoría del conocimiento[29] o con la ontología[30].

Por supuesto también que la lógica, en cuanto ciencia del análisis formal del razonamiento, no pretende en modo alguno agotar todos los aspectos de éste. Hay en el razonamiento —dicho sea cometiendo la vulgaridad de parafrasear una vez más una frase del *Hamlet*— muchas más cosas que su pura forma, otras muchas cosas que la lógica no busca. Ocurre

[27] Olvidando que, mientras la lógica es una ciencia formal del razonamiento, la psicología es una ciencia experimental que, en uno de sus apartados, se ocupa del razonamiento desde el punto de vista empírico. Piaget, por ejemplo, ha dedicado muchas páginas a establecer una neta distinción entre uno y otra, y, al propio tiempo, a postular entre ellas fecundas relaciones de buena vecindad.

[28] Olvidando que una cosa es la lógica como tal, la lógica «pura», y otra muy cercana —aunque distinta— la aplicación de patrones lógicos para el análisis de algunos —sólo algunos— aspectos de la actividad científica y sus resultados.

[29] Cfr. la nota anterior sustituyendo 'la actividad científica y sus resultados' por 'el conocimiento humano y, como forma eminente de éste, el conocimiento científico'.

[30] Olvidando que la lógica es una ciencia, mientras que la ontología es un capítulo de la filosofía. Pero no olvidemos la llamada «ontología formal».

simplemente que la actividad científica —y precisamente por eso la actividad científica necesita de la filosofía— opera sobre la base de la división —técnica, y no social— del trabajo. De ahí que no hayamos dicho que la lógica sea la ciencia del razonamiento a secas, sino la ciencia que se ocupa de los aspectos formales del razonamiento.

En efecto: cada ciencia, como decía Aristóteles[31], «recorta» o acota para sí un campo de objetos, aplicándose a estudiar las leyes que describen y explican el comportamiento de éstos, reconstruyendo racionalmente ese campo. Puesto que cada disciplina estudia una especie de objetos, es natural que lo haga en un *lenguaje* específico. Nada tiene de extraño que cada ciencia, aun compartiendo con otras ciencias muchos rasgos, presente rasgos peculiares, que se reflejan en el peculiar lenguaje que utiliza. Cada ciencia se hace (o incluso se puede decir que consiste en) su propio lenguaje, tanto más alejado del lenguaje contidiano, tanto más «técnico», cuanto más lejana, cuanto menos urgente, «natural» o inmediata aparezca al pensamiento vulgar la necesidad de plantearse los problemas relativos al campo de objetos que constituye el tema de esa ciencia. En algunos casos, las ciencias se limitarán —y no faltará quien diga que por eso se trata de ciencias limitadas, de ciencias aun en ciernes— a utilizar el lenguaje común enriquecido con unos pocos términos técnicos. En otros casos —el de la matemática, por ejemplo—, se impone la necesidad de contar con un lenguaje enteramente[32] artificial. Así ocurre también con la lógica. La naturaleza de su objeto de estudio —la forma de los razonamientos— hace necesario para esta ciencia el uso de un lenguaje especial. En efecto: como se desprende de los análisis psicológicos del razonamiento natural, la distinción entre forma y contenido, y, subsiguientemente, la consideración de aquélla independientemente no es, en el sujeto, espontánea. La capacidad de discernir entre una y otro se alcanzaría tan sólo —e incluso hay psicólogos que piensan que es una idealización suponer que todos los sujetos la alcanzan claramente— en la última etapa del desarrollo de las capacidades cognoscitivas, y sólo se actualizaría cuando el sujeto se viera en la necesidad de resolver problemas diseñados con el fin fundamental de ponerla en ejercicio. Por ello, una ciencia que se constituye como tal empeñándose en la tarea de abstraer la forma de los razonamientos prescindiendo de los contenidos a los que está se encuentra, en cada caso, incorporada, ha de vencer la resistencia del pensamiento —y, por ende, del lenguaje— natural, en el que forma y contenido se dan entremezclados, en el que la primera se encuentra casi siempre oculta o difuminada por el segundo. La lógica, pues, ha de hacer-

[31] *Met.*, Γ, 1, 1003 a 23-26.

[32] En rigor, no enteramente, por cuanto todo lenguaje artificial está construido en el seno de y a partir de un lenguaje natural, y, a despecho de su posterior independencia, que le permite funcionar autónomamente en campos restringidos de la actividad científica, sigue en el fondo pendiente de ese lenguaje natural.

se con un lenguaje en el que la forma aparezca *aislada*, en el que la estructura de los razonamientos *se muestre sola*.

Antes hemos dicho, simplificando considerablemente, que el lenguaje consta, en resumidas cuentas, de un vocabulario —un repertorio de términos— y una sintaxis —un repertorio de reglas para combinarlos. Pues bien: a la lógica no le basta con disponer de un vocabulario propio, artificial. Le es necesario además, y sobre todo, contar con una sintaxis artificial, artificialmente rigurosa. Le es necesaria la *formalización*. Formalizar un lenguaje es trazar —en el correspondiente metalenguaje, por supuesto— su estructura, su sintaxis. Ya hemos visto, en efecto, cómo en un lenguaje natural es posible construir expresiones que, siendo irreprochables desde el punto de vista sintáctico, carecen, sin embargo, de sentido. Se hace necesario, en lógica, «endurecer» las reglas —sintácticas— de formación, en evitación de que en los sistemas lógicos puedan crearse enunciados de esa naturaleza[33]. Con otras palabras: a la lógica *le interesa* que la sintaxis y la semántica coincidan en lo posible; la lógica desearía que todos los enunciados bien formados —es decir, sintácticamente correctos— tuvieran sentido —es decir, fueran semánticamente buenos—, y desearía asimismo que la inversa fuera verdadera —es decir, querría que todos los enunciados a los que quepa reconocer un sentido fueran también sintácticamente impecables. Se trata, sin embargo, de un deseo simplemente piadoso, que despierta en los lingüistas actuales una sonrisa de suficiencia —dado que, en la lingüística actual, la sintaxis, la semántica y la pregmática constituyen un fructífero revoltijo— y en los lógicos actuales una sonrisa de tristeza, dado que hoy se sabe, a ciencia cierta, que el ideal de coincidencia de sintaxis y semántica es inalcanzable incluso en lógica.

Al decir cuanto acabamos de decir hemos anticipado —y, además, en un tono un tanto enigmático— nociones y problemas que sólo más adelante —al final de este libro, y al principio de otros muchos— cabrá afrontar como es debido. Así pues, limitémonos de momento a reservar el recuerdo de estas cuestiones y a no olvidar algo que ya antes hemos dicho: la lógica se presenta en forma de cálculo. La lógica es, por consiguiente, un saber formalizado acerca de los principios formales del razonamiento.

Hemos intentado, ya ahora, definir la lógica. Parece evidente, sin

[33] Naturalmente, y como ya hemos insinuado, la creación literaria es posible —felizmente posible— justamente porque son posibles expresiones de este tipo. Y la existencia de sistemas lógicos en los que estas construcciones están proscritas ha de ser celebrada en la medida en que es por respecto a ellas como adquiere auténtico sentido —irónico sentido— la obra de los artistas del lenguaje. Pero la lógica no es ni una ciencia ni un arte del lenguaje, sino una ciencia y un arte que tiene, según tendremos ocasión de ver, importantes intereses en el lenguaje, por lo cual se ve obligada a tratar el lenguaje interesadamente.

embargo, que una ciencia sólo puede definirse, en todo caso, después de haberla expuesto. Pasemos, pues, a exponer la lógica formal.

Bibliografía

Advertencia previa

No es sólo que la Bibliografía que sigue no sea completa. Ni es, tampoco, que, además, la Bibliografía que sigue no tenga pretensión alguna de completud. Es que el sólo hecho de advertirlo resulta casi grotesco. Sabemos que la lógica es una de las ciencias que mayor desarrollo ha experimentado en el último siglo. Ello hace que la tarea de elaborar un censo de la literatura lógica producida de cien años para acá resulte punto menos que imposible incluso para todo un equipo de trabajo. Y no hablemos siquiera de la posibilidad de remontarnos bibliográficamente hasta el comienzo de la historia de la lógica.

Hemos optado, pues, por ofrecer una mínima selección de escritos sobre lógica que permita al lector continuar siéndolo en torno al tema.

Esa selección ha operado en dos planos: por una parte, en el de la determinación de los rótulos a ilustrar bibliográficamente; por otra parte, en el de la elección de los títulos a incluir bajo cada epígrafe.

En cuanto a lo primero, lo mejor hubiera sido, evidentemente, dedicar también sendos apartados a la historia de los escritos sobre lógica formal desde Aristóteles hasta nuestros días, y a las aplicaciones de la lógica en los diversos campos de la actividad raciocinante. Ello, sin embargo, no sólo suponía —por las razones ya aducidas— un esfuerzo fuera de nuestro alcance, sino que, aun habiendo estado dentro de nuestras posibilidades, hubiera constituido un apéndice desmesurado a una obra como ésta.

Por lo que se refiere a la selección de los títulos, hemos seguido dos criterios: el de la importancia de los textos y/o el de su accesibilidad. Los textos aparecen por orden alfabético de los nombres de sus autores. Ello introduce a veces cierta heterogeneidad en la teoría. En la práctica, sin embargo, favorece la localización de los mismos.

De cualquier modo, téngase presente que muchos de los libros aquí recogidos contienen amplios respertorios bibliográficos, circunstancia que, por una suerte de transitividad, hace esta Bibliografía nuestra mucho menos insuficiente.

1. *Algunas introducciones a la lógica formal*

ANDERSON, J. M. y JOHNSTONE, H. W.: *Natural Deduction* (The Logical Basis of Axiom Systems). Belmont (California), Wadsworth Publishing Company, 1962.

CARNAP, R.: *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen*. Viena Springer Verlag, 1934. Versión inglesa de W. H. Meyer y J. Wilkinson: *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*. Nueva York, Dover Publications, 1958.

COHEN, M. y NAGEL, E.: *An Introduction to Logic and Scientific Method*. Nueva York, Harcourt, Brace and Company, 1934. Versión castellana de N. Míguez: *Introducción a la Lógica y al Método científico*. 2 vols. Buenos Aires, Amorrortu editores, 1968.

COPI, I. M.: *Introduction to Logic*. Nueva York, The Macmillan Company, 1953. Versión castellana de N. Míguez: *Introducción a la lógica*. Buenos Aires, Eudeba, 1962; 11.ª reimpresión, 1971.

FERRATER MORA, J. y LEBLANC, H.: *Lógica matemática*. México, F. C. E., 1955; 2.ª ed. revisada, 1962.

GARRIDO, M.: *Lógica simbólica*. Vol. I: Madrid, Editorial Tecnos, 1973. Vol. II: *ibidem*, 1974. Edición en un solo volumen: *ibidem*, 1974. Segunda revisión ampliada: *ibidem*, 1977.

GRIZE, J. B.: *Logique moderne*. Fascículo I. París-La Haya, Gauthier-Villars/Mouton, 1969. Fascículo II, *ibidem*, 1971.

HILBERT, D. y ACKERMANN, W.: *Grundzüge der theorestischen Logik*. Berlin, Springer Verlag, 1928; 4.ª ed., 1959. Versión castellana de V. Sánchez de Zavala: *Elementos de lógica teórica*. Madrid, Editorial Tecnos, 1962.

KAHNE, H.: *Logic and Philosophy*. Belmont, California, Wadsworth Publishing Company, 1969.

KALISH, D. y MONTAGUE, R.: *Logic Techniques of Formal Reasoning*. Nueva York, Harcout, Brace and World, 1964.

LEMMON, E. J.: *Beginning Logic*. London, Thomas Nelson, 1965.

LORENZEN, P.: *Formale Logik*. Berlin, Walter de Gruyter, 1967.

MATES, B.: *Elementary Logic*. Oxford, Oxford University Press, 1965. Versión castellana de C. García Trevijano: *Lógica matemática elemental*. Madrid, Editorial Tecnos, 1970.

MENNE, A.: *Einführung in die Logik*. Berna, A. Francke Verlag, 1966. Versión castellana y «Prólogo crítico» de L. E. Palacios: *Introducción a la lógica*. Madrid, Editorial Gredos, 1969.

MOSTERIN, J.: *Lógica de primer orden*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1970.

QUINE, W. v. O.: *Methods of Logic*. Nueva York, Henry Holt and Company, 1950. Edición revisada, 1956. Versión castellana y presentación de M. Sacristán: *Los métodos de la Lógica*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1962; reimpresión en 1967.

REICHENBACH, H.: *Elements of Symbolic Logic*. Nueva York-Londres, The Free Press/MacMillan, 1947.

SACRISTÁN, M.: *Introducción a la lógica y al análisis formal*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1964, 1970.

2. *Algunos tratados de lógica*

BETH, E. W.: *The Foundations of Mathematics*. A study in the philosophy of science. Amsterdam. North-Holland, 1959. 2.ª ed. revisada, 1965.

CHURCH, A.: *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, Princeton University Press, 1956.

CURRY, H. B.: *A Theory of Formal Deducibility*. South Bend, Ind., Notre Dame Math. Lect., n.° 6, 2.ª ed., 1957.
CURRY, H. B.: *Foundations of Mathematical Logic*. Nueva York-Londres, McGraw-Hill, 1963.
HERMES, H.: *Einführung in die mathematische Logik*. Klassische Prädikatenlogik. Stuttgart, Teubner, 1963.
JEFFREY, R. C.: *Formal logic: its Scope and Limits*. Nueva York, Londres, McGraw-Hill, 1967.
KLEENE, S. C.: *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam, North-Holland, 1952; reimpr. 1967. Versión castellana de M. Garrido con la colaboración de R. Beneyto, J. Sanmartín y E. Casabán: *Introducción a la metamatemática*. Madrid, Editorial Tecnos, 1974.
KREISEL, G. y KRIVINE, J. L.: *Elements of Mathematical Logic* (Model Theory). Amsterdam, North-Holland, 1967.
MENDELSON, E.: *Introduction to Mathematical Logic*. Nueva York-Londres, Van Nostrand, 1964; reimpr., 1965, 1966.
PRIOR, A. N.: *Formal Logic*. Oxford, Clarendon Press, 1955; 2.ª ed., 1962.
REICHENBACH, H.: *Elements of Symbolic Logic*. Nueva York-Londres, The Free Press/Collier-MacMillan, 1947. Ed. en rústica, 1966.
SCHOLZ, H. y HASENJÄGER, G.: *Grundzüge der mathematischen Logik*, Berlín, Gottingen, Heildelberg: Springer, 1961.
SMULLYAN, R. M.: *First-order Logic*. Berlín, Springer Verlag, 1968.

3. *Historia de la lógica**

Sobre toda ella:

BOCHEŃSKI, I.-M.: *Formale Logik*. Freiburg-München, Karl Alber Verlag, 1956. V. cast. de M. Bravo: *Historia de la lógica formal*. Madrid, Editorial Gredos, 1966.
KNEALE, W. y M.: *The Development of Logic*. Oxford, at The Clarendon Press, 1961: reediciones con correcciones en 1964, 1966 y 1968. V. cast. (con las correcciones incorporadas) de J. Muguerza: *El desarrollo de la lógica*. Madrid, Editorial Tecnos, 1972.

Sobre algunos de sus periodos:

BOCHEŃSKI, I.-M.: *Ancient Formal Logic*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1956.
BOEHNER, Ph.: *Medieval Logic. An Outline of its Developmen from 1250-c. 1400*. Manchester, 1952.
ŁUKASIEWICZ, J.: «Z historii logiki zdán». *Przeglad Filozoficzny*, 37 (1934), págs. 417-37. V. alemana: «Zur Geschichte der Aussagenlogik». *Erkenntnis*, 5 (1935), págs. 111-31. V. castellana de J. Sanmartín: *Para una historia de la lógica de enunciados*. Valencia, Cuadernos Teorema, 1975.
ŁUKASIEWICZ, J.: *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford, at The Clarendon Press, 1951; 2.ª ed. ampliada, 1957. Hay anunciada versión castellana de esta obra en la Editorial Tecnos.
MATES, B.: *Stoic Logic*. Berkeley-Los Angeles, 1953.
SCHOLZ, H.: *Abriss der Geshichte der Logik*. Berlín, 1931; 2.ª ed. Friburgo-Munich, Karl Alber Verlag, 1959.
STYAZHKIN, N. I.: *History of Mathematical Logic from Leibniz to Peano*. Moscú, Nauka, 1964. V. inglesa en Cambridge, Mass., The M. I. T. press, 1969.

* Especial mención merece en este punto, por sus estudios sobre la historia de la lógica en la Península Ibérica, el Padre Vicente Muñoz. De entre sus numerosos trabajos citaremos, por ejemplo, la *Lógica Hispano-Portuguesa hasta 1600*. Salamanca, 1972.

4. *Repertorios bibliográficos. Diccionarios**

CHURCH, A.: «A Bibliography of Symbolic Logic». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 1, n.° 4 (1936), págs. 121-218.
CHURCH, A.: «Additions and Corrections to *A Bibliography of Symbolic Logic*». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 3, n.° 4 (1938), págs. 178-204.
FEYS, R.-FITCH, F. B.: *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969; reimpresión corregida, 1973*.

* Señalemos la gran utilidad que ha de tener para los interesados por la lógica la consulta de los artículos sobre el tema contenidos en el *Diccionario de Filosofía* de J. Ferrater Mora, 5.ª ed., Buenos Aires, Ed. Sudamericana, 1965. El autor prepara edición muy ampliada para Revista de Occidente.

Capítulo II
LA LOGICA DE ENUNCIADOS

1. Nociones básicas

Enunciados y conectivas

El apartado más elemental —en un doble sentido: el más simple y, al propio tiempo, el apartado básico— de la lógica formal es la lógica de enunciados o de proposiciones.

Ahora bien: la lógica, según hemos señalado hasta la saciedad en el capítulo anterior, nos llega hoy en forma de cálculo. Mejor dicho: la lógica se nos presenta en forma de sistema de cálculos, en forma de conjunto «sobre-acumulado» de cálculos, o, si se prefiere decirlo así, en la forma de un cálculo que se va reconstruyendo para irse haciendo cada vez más potente. El cálculo base, el cálculo en el que se apoya y sobre el cual se construye el edificio de la lógica es *el cálculo de enunciados*, objeto de todo este capítulo.

Es evidente, tras lo dicho en el capítulo anterior, que al hablar de «cálculo *de enunciados*» ya no estamos, en rigor, hablando de un puro cálculo, sino de un cálculo provisto de una determinada interpretación[34]. Lo que vamos a exponer de inmediato es, pues, el análisis lógico, dispuesto como un cálculo, de las relaciones de inferencia entre proposiciones. Vale decir: expondremos los resultados formalizados del examen de la

[34] En realidad, y como muestra de lo que en el capítulo anterior decíamos acerca de la independencia teórica de un cálculo por respecto a sus diferentes interpretaciones, iremos presentando, *en una serie de notas que llevarán*, además *del número que les vaya correspondiendo, un asterisco*, otra interpretación posible de este cálculo que, en el texto principal del libro, da forma a la lógica de enunciados.

validez formal de las inferencias mediante las cuales deducimos un enunciado *tomando en bloque* a partir de otro enunciado tomado en bloque también. En las páginas que siguen trataremos de desarrollar con claridad el sentido de cuanto acabamos de decir. Y lo desarrollaremos, para empezar, en un lenguaje intuitivo.

La tarea de la lógica es, como tantas veces hemos señalado ya, el análisis formal de los razonamientos. Y el lugar de ese análisis es el lenguaje. Sólo en el lenguaje, sólo en la medida en que están formulados en un lenguaje se ofrecen los razonamientos a la posibilidad del análisis. El análisis del razonamiento supone, por tanto, un análisis del lenguaje. Un análisis *lógico* del lenguaje. En efecto: ante una expresión como

> dieron las seis y llamó Cabra a lición: fuimos y oímos todos,

el análisis literario reparará en las características del estilo de Francisco de Quevedo; el análisis lingüístico hablará —si se trata, por ejemplo, en concreto, de un análisis sintáctico— de sintagmas nominales, de sintagmas verbales, etc. El análisis, en cambio, *desde el nivel en que ahora nos encontramos*, se limitará a señalar la existencia de cuatro enunciados: *a*) 'Dieron las seis'. *b*) 'Llamó Cabra a lición'. *c*) 'Fuimos'. *d*) 'Oímosla todos'. Y en el siguiente cuarteto de Garcilaso la lógica no hallaría tampoco *por ahora* sino cuatro proposiciones, a una por verso:

> El ancho campo me parece estrecho.
> La noche clara para mí es oscura.
> La dulce compañía, amarga y dura.
> Y duro campo de batalla el lecho.

Hemos subrayado más arriba la locución 'desde el nivel en que ahora nos encontramos' porque hay, como veremos, niveles de análisis lógico —y, por ende, de análisis lógico del lenguaje— más finos, detallados y precisos que éste en que ahora nos disponemos a introducirnos. Cada nuevo cálculo lógico —o, por mejor decir, cada nueva ampliación del cálculo lógico— es solidario de un nuevo tipo de análisis del lenguaje. Y dado que cada nueva ampliación del cálculo conlleva un mayor afinamiento, una mayor sutileza en el análisis forma del razonamiento, es claro que ello supondrá también una profundización cada vez mayor en el análisis del lenguaje, una continua prosecución de ese análisis en busca de nuevos elementos que sean relevantes para la validez de las inferencias.

Por el momento nos encontramos —lo hemos dicho al comienzo— en el apartado más elemental de la lógica. El análisis del lenguaje que a él corresponda ha de ser, pues, también, el más elemental, el más «grueso». El análisis del lenguaje en que se basa la lógica de propo-

siciones divide el lenguaje —y ya es simplificar— en dos tipos de elementos:

- De una parte, *oraciones*, frases enteras.
- De otra parte, *conjunciones* —en un sentido lógico del término—, partículas que sirven para enlazar oraciones y formar oraciones compuestas a base de oraciones simples.

Estas son las dos únicas categorías de signos que la lógica de enunciados considera: los enunciados tomados en bloque, por un lado, y, por otro lado, las conexiones entre ellos.

Tomemos, en efecto, un ejemplo:

> Cuando se hubieren acabado los mil años, será Satanás soltado de su prisión y saldrá a extraviar a las naciones que moran en los cuatro ángulos de la tierra, a Gog y a Magog, y reunirlos para la guerra[35].

¿A qué queda reducido este texto cuando lo analizamos lógicamente desde el nivel de la lógica de enunciados? Queda reducido todo él a una sola proposición compuesta: compuesta de dos proposiciones, la segunda de las cuales es a su vez también una proposición compuesta. El resultado del análisis, presentado muy rudimentariamente, sería éste:

Cuando ..., [entonces] ... y ... y ...

Así pues, el texto entero constituye una única proposición compuesta. Pero dentro de ella distinguiríamos, por una parte, una primera proposición, simple o atómica[36], que sería 'se hubieren acabado los mil años'. Y una segunda proposición compuesta de tres proposiciones enlazadas por la conjunción 'y', a saber: 'será Satanás soltado de su prisión', 'saldrá a extraviar a las naciones que moran en los cuatro ángulos de la tierra' y '[saldrá a] reunirlos para la guerra'. Y esto es todo.

Vemos, entonces, qué es lo que se quiere decir al afirmar, como nosotros hemos hecho varias veces, que este primer apartado de la lógica se ocupa de las relaciones de inferencia entre enunciados tomados en bloque. Quiere decir que el análisis lógico se detiene por ahora al borde de los enunciados, sin penetrar en la estructura interna de éstos, siendo el enunciado, por tanto, la unidad de análisis. Quiere decir que la lógica de enunciados es una lógica de los enunciados *sin analizar*. Quiere decir que la lógica de enunciados sólo tendrá en cuenta aquellas formas de deducir un enunciado a partir de otro que sean válidas sin necesidad

35 *Apocalipsis*, 20, 7 y 8.
36 En el sentido de que no puede ser analizada en partes que sean a su vez proposiciones.

de analizar por dentro cada uno de ellos. Los elementos que componen internamente un enunciado —términos que designan individuos, términos que designan propiedades, etc.— son, *por el momento*, irrelevantes desde el punto de vista lógico. Sólo interesan los enunciados como tales, cada uno de ellos en cuanto formando un todo.

Los dos razonamientos siguientes:

> Si la sociedad de los hombres ha de ser siempre como ahora, entonces la corrupción es eterna.
> Es así que la corrupción no es eterna.

Luego

> No ha de ser siempre como ahora la sociedad de los hombres;

y

> Si florecen las hortensias, entonces se marchitan los tulipanes. Es así que no se marchitan los tulipanes.

Luego

> No florecen las hortensias,

pueden darnos ocasión para hacer dos observaciones— estrechamente relacionadas, por lo demás.

En primer lugar, habría que insistir en la distinción entre forma y contenido de un razonamiento. En cada uno de los dos citados el contenido es diferente. Es obvio que en uno y otro se habla de cosas dispares: de la condición humana, en el primero; en el segundo, de floricultura.

Lo cual es tanto como decir, en segundo lugar, que la forma permanece *constante*, mientras que el contenido *varía*. Lo cual, a su vez, es tanto como volver a decir que hay dos tipos de signos: los signos *constantes*, que representan esa forma que no varía, y los signos *variables*, que constituyen el contenido, distinto en cada caso.

Ahora bien: puesto que la lógica se fija tan sólo en la forma, parece que los dos razonamientos que acabamos de presentar se reducirían, desde el punto de vista lógico, a lo siguiente:

> Si ..., entonces ...
> Es así que no ...

Luego

> No...

Pero con esto no basta. Porque la lógica, si bien prescinde de los contenidos concretos, distintos en cada ocasión, variables de un razonamiento a otro, no puede prescindir de la idea de contenido en general, de la idea de que la forma lógica —que la lógica, de oficio, considera aislada— es siempre la forma de algún contenido. La lógica necesita,

pues, encontrar el medio de indicar la presencia de un contenido, sin por ello comprometerse con ningún contenido concreto. Necesita un tipo de signos que sean el esquema de cualquier contenido, que nos hagan presente que, en el lugar de ellos, podríamos poner un enunciado cualquiera. Hemos dicho '*un enunciado* cualquiera' y hemos dicho bien. Porque si estamos —y así parece indicarlo el título de este capítulo— en lógica de enunciados, el contenido de los razonamientos lo constituirán esos enunciados, mientras que la forma vendrá señalada por el segundo tipo de signos, signos como 'y', 'no', 'si ..., entonces ...', y otros más, que sirven para poner a aquellos en relación. Al tipo de signos que se utilizan para dar idea de cualquier contenido se les llama '*variables*'. Y puesto que el contenido son los enunciados o proposiciones, esas variables serán 'variables de enunciado', 'variables proposicionales', signos que pueden ser sustituidos por cualquier cosa, *siempre que esa cosa cualquiera sea un enunciado.*

En resumen: la lógica es lógica formal, consideración abstracta de la forma de los razonamientos prescindiendo de su contenido. De su contenido concreto, pero no de la idea de contenido. Aparte, pues, de los signos mediante los cuales se muestra la forma, el lenguaje de la lógica precisa de una serie de signos que aludan a la presencia de un cierto contenido. Ahora bien: en la lógica de enunciados, como primer nivel del análisis lógico, de lo que se trata es de analizar la validez de aquellos razonamientos en los que se parte de premisas que son enunciados sin analizar para llegar, como conclusión, a enunciados que tampoco se analizan. Desde el punto de vista de la lógica de enunciados, la forma de los razonamientos no es sino el modo —los distintos modos— como esos enunciados se relacionan entre sí. Y el contenido son los enunciados mismos.

Hablemos, para empezar, del contenido[37].

Variables y valores de verdad

El contenido en general lo representamos mediante variables, mediante signos que sustituyen a *enunciados cualesquiera*. Es decir, que sustituyen

[37] No hace falta insistir —siendo, como es, evidente— en la importancia decisiva que para el desarrollo de la lógica formal ha tenido la introducción del uso de variables. Si la lógica, en efecto, se constituye como lógica formal, y si la forma —la idea de forma— es una entidad abstracta, abstraída de los contenidos concretos a que en cada caso aparece ligada, pero al propio tiempo, asociada con —definida siempre por relación a— la idea de contenido, entonces no es posible poner en duda la necesidad de utilizar variables: porque las variables son signos que, por una parte, permiten que la forma se muestre en solitario, y, al mismo tiempo, nos recuerdan que, aun pudiendo la forma considerarse independientemente del contenido —como ocurre en las consideraciones lógico-formales—, de hecho, sin embargo, no se da nunca sin éste. La idea de forma llama a la idea de contenido y de éste dan idea las variables.

a un enunciado cualquiera, pero, en conalquier caso, a un enunciado[38]. Su campo de valores está constituido por el conjunto de los enunciados. Convendremos, siguiendo una práctica ya casi universal, en utilizar las letras '*p*', '*q*', '*r*', '*s*', '*t*', etc., como variables de enunciado.

La variable *p*, pongamos por caso, estará, entonces, en el lugar de un enunciado cualquiera. Ahora bien: los enunciados de los que nos estamos ocupando por ahora son, como ya hemos señalado, los enunciados descriptivos. Y los enunciados descriptivos —a diferencia, por ejemplo, de los enunciados interrogativos, o de los prescriptivos— presentan una peculiaridad, ya indicada también: son siempre, o bien verdaderos o bien falsos; tienen necesariamente un valor de verdad[39].

Por tanto, la variable *p* —de la que sólo sabemos que puede ser sustituida por cualquier enunciado descriptivo— podría tener el valor verdad o el valor falsedad, y siempre necesariamente uno de esos dos valores. Lo indicaremos así:

p
V
F

o bien asi:

p
1
0

donde, como es obvio, '1' significa 'verdadero' y '0', 'falso'.

Si en lugar de una sola variable tomamos dos a la vez y combinamos sus respectivos valores de verdad posibles, obtendremos una tabla de este tipo:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

[38] Y no, por ejemplo, a un adjetivo, o a un adverbio, o a un sustantivo. Adjetivos, adverbios, sustantivos, son, como nos ha enseñado la gramática tradicional, «partes de la oración», y no oraciones enteras.

[39] En otro lugar de esta obra encontrará el lector una presentación esquemática de aquellos otros sistemas lógicos construidos sobre el principio de que los valores de verdad de un enunciado no se reducen a la verdad a secas y a la falsedad sin más, sino que es necesario admitir valores intermedios: indeterminación, mayor o menor probabilidad, etc. Por el momento, sin embargo, nos atendremos al llamado 'Principio de Bivalencia': Todo enunciado es o bien verdadero o bien falso.

Es decir, que al considerar conjuntamente dos enunciados cualesquiera, cada uno de los cuales puede ser por su parte verdadero o falso, nos encontramos con cuatro posibilidades, a saber: que el primero sea verdadero y el segundo también; que el primero sea verdadero y el segundo falso; que el primero sea falso, y verdadero el segundo; y, por último, que sean falsos ambos.

Si se trata de tres proposiciones, entonces las posibilidades serán ocho:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Es decir: que puede que los tres sean verdaderos; que puede que sean verdaderos los dos primeros y el tercero falso; etc.

En general, dado un número n de enunciados, el número de combinaciones posibles de sus valores de verdad será 2^n: si n vale 4, es decir, si los enunciados a considerar son en número de cuatro, entonces la tabla presentará dieciséis casos posibles; si $n = 5$, treinta y dos, etc.

Hasta ahora, sin embargo, no hemos hecho sino considerar aisladamente —uno a uno, o en grupos de dos, o de tres, etc.— los signos del primer tipo de los dos que, como hemos dicho, componen el lenguaje formalizado de la lógica de enunciados.

Pero está el segundo tipo de signos. Son aquellos cuya misión es servir de enlace, establecer conexiones entre los enunciados representados en conjunto por las variables[40*].

Y vamos ahora a ver cuáles son esas conexiones lógicas entre enunciados.

[40*] Imaginemos una segunda interpretación de este mismo cálculo. Supongamos que los dos tipos de signos, en lugar de designar enunciados y relaciones entre enunciados, designan *clases* y relaciones entre clases. Dada una propiedad cualquiera —la propiedad, por ejemplo, de ser icosaedro, o de ser demócrata cristiano—, podemos construir la clase —el conjunto, la colección— de todas aquellas entidades que reúnun esa propiedad: los icosaedros, los demócrata-cristianos. A la espera de una definición más precisa del concepto de clase, designaremos con los simbolos '*A*', '*B*', '*C*', etc., clases cualesquiera, o, como también diremos (considerando a este nivel como sinónimos ambos términos) *conjuntos* cualesquiera de objetos, tales como el conjunto de los batracios, el conjunto de las ecuaciones diferenciales, el conjunto de los rios de Siberia, el conjunto de los dioses etruscos, etc.

La negación

Sea un enunciado cualquiera p[41].

Con este enunciado podemos hacer, para empezar, algo muy simple: *negarlo*. La negación de p será, como es obvio, no-p; en símbolos,

$$\neg p$$

Ahora bien: '$\neg p$' es también un enunciado. Tendrá, pues, un valor de verdad. Pero su valor de verdad no será, evidentemente, el mismo que el de p. Será más bien exactamente el contrario. Si 'p' es verdadero, '$\neg p$', que es su negación, será falso. Y si 'p' es falso, su negación será verdadera[42*]. O, en forma de tabla:

p	$\neg p$
1	0
0	1

La conjunción

Sean ahora dos enunciados cualesquiera, p y q.

Una forma muy elemental de ponerlos en relación sería unirlos mediante la conjunción *y*:

$$p \text{ y } q$$

O, en símbolos:

$$p \wedge q$$

[41*] Sea una clase cualquiera *A*.

[42*] Pensemos en una clase cualquiera: la clase, por ejemplo, de los canallas. De ella formarán parte todas aquellas entidades que ostenten esa propiedad, que merezcan ese calificativo. Y por respecto a esa clase podemos imaginarnos esta otra: la clase formada por todas aquellas entidades que *no son* unos canallas, la clase de los no-canallas. A esta última clase se le llamará *clase complemento* de la primera. Así, la clase complemento de la clase de las cosas agradables será la clase de las cosas desagradables, la clase complemento de la clase de los suicidas será la clase formada por todos aquellos que no se han suicidado, etc.

Y si la clase de los suicidas la representamos así:

$$A$$

su clase complemento sería, en símbolos,

$$-A$$

A esta operación la llamaremos '*conjunción* de p y q'. La conjunción de dos enunciados es, ella a su vez, un enunciado: la unión de dos enunciados simples o «atómicos» lleva a la formación de un enunciado compuesto —«molecular», hecho de partes que son enunciados—. Así pues, la conjunción de p y q tendrá también su propio valor de verdad. Y su valor de verdad, el valor de verdad del enunciado compuesto, dependerá —es razonable suponerlo— de los valores de verdad de los enunciados simples que lo componen.

Puesto que se trata de *dos* enunciados, las posibilidades de combinación de sus valores de verdad serán, ya lo hemos dicho, cuatro:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

¿Cuáles serán, entonces, los valores de verdad de la conjunción de dos enunciados cualesquiera?

Parece claro —y conforme con el uso de la conjunción 'y' en el lenguaje ordinario— que una conjunción sólo será verdadera cuando lo sean *los dos* enunciados por ella unidos, y falsa en todos los demás casos. El extraño enunciado 'se vencían las marioplumas y todo se resolviraba en un profundo pínice'[43] será verdadero sólo si es verdad que las marioplumas se vencían *y también* que en un profundo pínice se resolviraba todo[44*].

Es decir,

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

[43] Julio Cortázar. *Rayuela*, cap. 68.

[44*] Sean ahora, en la otra interpretación del cálculo, dos clases cualesquiera, *A* y *B*. Supongamos que la clase *A* es la clase de los gasterópodos. Y que la clase *B* es la clase de los necios.

Podemos, a base de la clase *A* y de la clase *B*, construir la clase de las cosas que son a la vez *A* y *B*: la clase formada por todas aquellas entidades que son a la vez gasterópodos y necios. Dicho sin rodeos: la clase de los gasterópodos necios. Esta clase es el producto de las otras dos. Se le llama precisamente '*clase producto*'. Es el producto de la operación que llamamos también a veces '*intersección* de clases'. Al igual que la conjunción de

Los miembros de una conjunción —ambos, o uno cualquiera— pueden, evidentemente, estar negados:

$$\neg p \wedge \neg q$$
$$\neg p \wedge q$$
$$p \wedge \neg q$$

¿Cuál sería, entonces, el valor de verdad de, por ejemplo, la tercera de las expresiones que acabamos de escribir?

Si la combinación de los valores de p y q es, como hemos visto,

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

la de los valores de p y $\neg q$ será

p	$\neg q$
1	0
1	1
0	0
0	1

puesto que los valores de $\neg q$ son justamente los contrarios que los de q.

---

dos enunciados es un enunciado, la intersección de dos clases es una clase nueva cuyos miembros serán todas aquellas entidades que pertemezcan *a la vez* a una y a otra clase. La intersección de la clase de los enanos y de la clase de los —de los seres humanos— cariacontecidos será la clase de los enanos cariacontecidos. Así pues, del mismo modo que una conjunción de enunciados sólo es verdadera cuando lo son *todos* sus miembros, de una clase producto de dos clase sólo formarán parte aquellas entidades que sean miembros de ambas a la vez.

El producto de dos clases, A y B, lo simbolizaremos así:

$$A \cap B,$$

y, suponiendo que cada círculo representa una clase, podríamos representarlo del modo siguiente:



donde la clase producto correspondería a la superficie rayada.

Y si el valor de la expresión '$p \wedge q$' es

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

el de la expresión '$p \wedge \neg q$' será, entonces,

p	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
1	0	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0

Y el de una expresión como '$\neg p \wedge \neg q$' no será otro que

$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Evidentemente, mediante la conjunción '*y*' podemos unir más de dos enunciados. Tres, por ejemplo:

$$p \wedge q \wedge r$$

¿Cuál será el valor de verdad de esta expresión? Lo que antes dijimos sigue valiendo. La conjunción '$p \wedge q \wedge r$' sólo será verdadera cuando lo sean sus tres miembros

p	q	r	$p \wedge q \wedge r$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

La disyunción

Pero también podríamos aplicar a p y q una operación llamada '*disyunción*', que consistiría en unirlas mediante la partícula 'o':

$$p \text{ o } q$$

Ahora bien: esta expresión es ambigua. Puede interpretarse en dos sentidos: en sentido *excluyente* o en sentido *no excluyente*. Y es que en el lenguaje ordinario podemos construir expresiones de este tipo:

> *o* se es pagano o se es cristiano

Pero también de este otro

> Han sido fusilados todos aquellos que presentaban alguna tara somática *o* defendían ideas disolventes.

En el primer caso, la disyunción es excluyente: el ser pagano escluye el ser cristiano. Si se da una de las alternativas, entonces no se da la otra. O se es pagano o se es cristiano, *y no ambas cosas a la vez*.

En el segundo caso, en cambio, nos encontramos ante una disyunción que no es excluyente: por desgracia, nada impide —nada ha impedido— que hayan sido fusilados personas que reunían ambas características, si bien en muchos casos ha bastado con poseer una de ellas para ser fusilado.

Así pues, en castellano, la conjunción 'o', por sí sola, es de doble sentido[45]. La ambigüedad puede eliminarse, tal como nosotros hemos hecho arriba, añadiendo a la pura disyunción la cláusula '... y no ambas cosas a la vez'. Disponemos de varias cláusulas más de este tipo:

> *Una de dos:* o Menéndez Pelayo ignoraba lo que era la crítica literaria, o la crítica literaria es imposible.
>
> O practicas la castidad, o, *de lo contrario*, perderás tu alma.

Hay ocasiones en que es el propio contexto sin más el que nos permite salir de dudas respecto de la naturaleza de la disyunción. Así, es obvio que en contextos como

> me lo traerán vivo o muerto

[45] No así, por ejemplo, en latín, donde para la disyunción en su sentido excluyente se emplea la partícula '*aut*' ('*aut* ... *aut* ...'), y la partícula '*vel*' para la disyunción en su sentido no excluyente.

y no digamos en contextos como

> o se tiene dignidad o no se tiene,

la partícula 'o' posee un sentido excluyente[46].

En realidad, pues, una expresión como

$$p \text{ o } q$$

puede significar tanto

$$p \text{ o } q \text{ y no ambos a la vez}$$

como

$$p \text{ o } q \text{ o ambos a la vez}$$

Pues bien: aunque parece que en el lenguaje ordinario la disyunción por excelencia, la más neta, es la disyunción excluyente —y a ella corresponde, por supuesto, una operación lógica de la que hablaremos más adelante—, desde el punto de vista lógico es mucho mayor la importancia de la disyunción no excluyente. Por tanto, y siempre que no indiquemos explícitamente lo contrario, entenderemos las expresiones del tipo

$$p \text{ o } q$$

como significado

$$\text{o } p \text{ o } q \text{ o ambos a la vez}$$

y representaremos esa disyunción no excluyente así:

$$p \vee q$$

No puede sorprender, a la vista de lo dicho, que los valores de verdad de una disyunción —de una disyunción *no excluyente*, y es ya la última vez que hacemos esta cualificación— sean éstos:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

[46] También, por ejemplo, tiene sentido excluyente la partícula 'o' en el contexto la disyunción puede entenderse en un sentido excluyente *o* en un sentido no excluyente'.

Es decir, que una disyunción, en el sentido indicado, es verdadera con sólo que lo sea uno de sus miembros. Y, naturalmente, es verdadera también si lo son los dos. Imaginemos una pregunta como ésta:

—«¿A qué hora sale el tren hacia la tolerancia no represiva?»

Y esta respuesta:

—«Hay un tren a las trece cuarenta y cinco o a las diecisiete cincuenta y dos.»

Esta respuesta, que es una disyunción, será verdadera en tres casos: 1) Si hay un tren a las trece cuarenta y cinco, aunque no lo haya a las diecisiete cincuenta y dos (caso 1-0 de la tabla). 2) Si no hay un tren a las trece cuarenta y cinco, pero sí lo hay, en cambio, a las diecisiete cincuenta y dos (caso 0-1). 3) Si hay dos trenes, uno a las trece cuarenta y cinco y otro a las diecisiete cincuenta y dos. Y sólo será falsa si —como nos tememos— no hay tren para ese sitio a ninguna de esas horas[47*].

Hasta ahora, sin embargo, nos hemos puesto en el caso más sencillo. Porque, por supuesto, no todas las disyunciones son simples disyunciones entre proposiciones simples como

$$p \vee q$$
$$r \vee s$$
etc.,

[47*] Volvamos a las clases A y B ,dos clases cualesquiera.

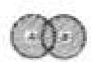
Supongamos que la clase A es la clase de todas aquellas personas que han conseguido mantenerse en el poder por medio del terror, y que la clase B es la clase de todas aquellas personas que han conseguido mantenerse en el poder merced a la corrupción.

Podemos, a base de la clase A y la clase B, construir la clase de todas aquellas personas que han conseguido mantenerse en el poder bien mediante el terror, bien mediante la corrupción, bien por ambos procedimientos. Para ser miembro de la clase resultante —resultante de esa operación, a la que llamaremos *'unión'* o *'suma'* de clases— no hace falta —como sí ocurría, en cambio, con la operación del producto— haber utilizado como instrumento de poder tanto el terror como la corrupción: basta con haber utilizado uno de esos dos recursos. Aunque también, desde luego, formarán parte de esa clase unión quienes hayan echado mano de ambos.

La unión de dos clases A y B la simbolizaremos así

$$A \cup B$$

y la representaremos así



correspondiendo la clase unión a la superficie rayada.

o entre proposiciones simples negadas

$$\neg p \vee q$$
$$r \vee \neg s,$$

cuyos valores de verdad serían

$\neg p$	q	$\neg p \vee q$
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

r	$\neg s$	$r \vee \neg s$
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	1	1

sino que los miembros de la disyunción pueden ser a su vez enunciados compuestos. Así,

$$(p \vee q) \vee r,$$

cuyo valor de verdad (dado que para que una disyunción —tenga el número de miembros que tenga— sea verdadera basta con que lo sea uno solo de ellos) sería[48].

p	q	r	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

[48] Como veremos, la disyunción —comparable con la suma aritmética, del mismo modo que la conjunción lo sería con el producto— tiene, al igual que la suma —y también la conjunción, al igual que el producto—, la propiedad asociativa, de tal suerte que una expresión como

$$(p \vee q) \vee r$$

equivale a

$$p \vee (q \vee r)$$

y ambas a

$$p \vee q \vee r$$

Podríamos construir expresiones en las que aparecieran a la vez la conjunción y la disyunción. ¿Cuál sería el valor de verdad de una expresión como

$$(p \wedge q) \vee r \ ?$$

Se trata de una disyunción, uno de cuyos miembros es a su vez una conjunción. Para hallar su valor de verdad hemos de hallar antes el de sus miembros. El de uno, r, ya lo tenemos. El del otro, $(p \wedge q)$, hemos de averiguarlo. No nos resultará difícil, sabiendo, como sabemos, cuál es la regla para obtener los valores de verdad de una conjunción:

p	q	r	$p \wedge q$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Y ahora, conocidos los valores de los dos miembros, podemos conocer ya el de la disyunción, es decir, el de la expresión entera:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Utilizando a la vez los tres signos constantes de que hasta ahora disponemos, podemos contruir expresiones como ésta:

$$(\neg p \vee q) \wedge \neg r$$ [49*]

[49*] Utilizando a la vez los tres signos constantes de que hasta ahora disponemos podemos construir expresiones como ésta:

$$(-A \cup B) \cap -C$$

y del mismo modo que la expresión '$(\neg p \vee q) \wedge \neg r$', isomorfa de ésta, es un enunciado —un enunciado compuesto, un enunciado conjuntivo, una conjunción de enunciados—,

Se trata de una conjunción, cuyo segundo miembro está negado y cuyo primer miembro es una disyunción con el primer miembro negado.

Para averiguar el valor de verdad de la expresión entera, tendremos que hallar, antes de nada, el valor de verdad de cada uno de sus miembros. Estos son los del primero:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Ya tenemos los valores de verdad del primer miembro. Conozcamos también los del segundo:

$\neg r$
0
1
0
1
0
1
0
1

Y ahora los de la expresión entera:

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg r$	$(\neg p \vee q) \wedge \neg r$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

así esta expresión designa una clase: la clase intersección de, por una parte, la clase unión de la clase complemento de la clase A y la clase B, y, por otra parte, la clase complemento de la clase C.

El condicional

Hasta ahora nos hemos limitado a traducir al lenguaje de la lógica expresiones como

murió Adonais y por su muerte lloro (Shelley)

es decir, enunciados conjuntivos; o bien como

el cóndor o la nieve parecían inmóviles (Neruda)[50],

esto es, enunciados disyuntivos.

¿Qué decir, sin embargo, de enunciados como

si el alma habla, *entonces* ya no es el alma la que habla (Schiller)

La partícula 'si ..., entonces ...' es también una partícula de unión entre enunciados. Podemos establecer entre un enunciado p y un enunciado q una relación que consistiría en decir:

si p, entonces q,

y que se simbolizaría así:

$$p \rightarrow q$$

A los enunciados que tienen esta forma les llamaremos 'enunciados *condicionales*' o '*condicionales*', a secas.

¿En qué casos será verdadero un enunciado así compuesto?

Veamos los casos posibles uno por uno.

Tenemos, en primer lugar, el caso en que tanto el enunciado p —al que, por la posición que ocupa, llamaremos 'antecedente' del condicional— como el enunciado q —el 'consecuente'— son verdaderos.

Es claro que si tanto su antecedente como su consecuente son verdaderos, un condicional será verdadero:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	
0	1	
0	0	

[50] Es decir, si se nos permite el atropello lógico-formal: «o el cóndor parecía inmóvil o la nieve parecía inmóvil».

El segundo caso de la tabla tampoco parece presentar problemas. En el caso de que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, el condicional será falso. En efecto: ¿qué es lo que estamos diciendo al decir 'si p, entonces q'? Estamos diciendo que si se da el hecho enunciado por p, entonces se dará el hecho enunciado por q. Estamos diciendo que p es condición suficiente —aunque, como veremos, no condición necesaria— de q. Entonces, el hecho de que se dé p *y no* se dé q constituye una refutación del enunciado 'si p, entonces q'[51], lo hace falso.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	
0	0	

¿Qué decir ahora del tercer caso, el caso en que el antecedente es falso y el consecuente verdadero? En un primer momento podríamos sentirnos tentados a decir que cuando p es falso y q es verdadero la expresión 'si p, entonces q' *no es ni verdadera ni falsa*: podría parecer, en efecto, que, al ser ya falso el antecedente, carece de sentido plantearse el problema de la verdad o falsedad del condicional.

Pero pensemos que estamos en una lógica bivalente. Recordemos que los enunciados con los que trabajamos sólo pueden tener —y necesariamente tienen que tener— uno de estos dos valores: verdad o falsedad. En los casos en que esos enunciados no sean falsos, serán verdaderos, y viceversa. Y en el caso 0-1 el enunciado 'si p, entonces q' no es falso. No es falso, porque al decir 'si p, entonces q', lo único que estamos diciendo es que p es condición suficiente, pero no también condición *necesaria* —es decir, no la única condición— de q. Cabe, por tanto, perfectamente la posibilidad de que q sea verdadera aunque no lo sea p. Y, en consecuencia, puesto que la falsedad de su antecedente no hace falso un condicional, lo hace, por ello mismo, verdadero.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	

[51] Como lo muestra el hecho de que la tabla de verdad de una expresión como '$p \wedge \neg q$' presente los valores opuestos a los de la tabla de verdad de '$p \rightarrow q$'.

Queda ya sólo el último caso: aquel en que son falsos tanto el enunciado que hace de antecedentes como el que desempeña el papel de consecuente.

Cabe hacer aquí las mismas observaciones que hacíamos en torno al caso anterior. Una expresión como 'si p, entonces q', mediante la cual queremos decir que no se da p sin que se dé q, sólo será falsa en el caso de que p sea verdadero y q falso. Y ése no es aquí el caso. Por tanto, puesto que la falsedad de p y de q no hace falso el condicional por ellos formado, no queda otro remedio que decir que lo hace verdadero[52].

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Esa será, pues, la tabla de verdad del condicional[53*].

[52] En el lenguaje ordinario, por lo demás, construimos a veces condicionales como éste:

> Si Empédocles de Agrigento había nacido en Upsala, entonces el expreso de las 11,45 tiene su salida regular a las 18,36.

Condicionales de este tipo —verdaderos en cuanto tales condicionales, aunque su antecedente y su consecuente sean falsos— los utilizan con cierta frecuencia los sujetos para expresar algo así como una conexión entre absurdos: si fuera verdad un absurdo tal como que Empédocles de Agrigento había nacido en Upsala (en cuyo caso parece que lo razonable sería llamarle «Empédocles de Upsala»), entonces *ya* puede ser verdadero cualquier otro absurdo.

Pensemos, por otra parte, en expresiones como los llamados «condicionales contrafácticos», cuyo estudio pertenece más bien a la teoría de la ciencia que a la lógica. Por ejemplo:

> «Si los comunistas españoles se hubieran pronunciado oportuna y decididamente por el boicot, difundiendo en el país incluso pequeñas hojas sobre el particular, su prestigio en el momento de la caída del ministro Berenguer habría aumentado considerablemente.» (L. Trotski.)

Es evidente que al antecedente de este condicional es falso: va contra los hechos. Si hubiera sido verdadero —y el subjuntivo indica precisamente que éste no es el caso—, verdadero hubiera sido también el consecuente— que, sin embargo, es falso también.

[53*] Tomemos dos clases cualesquiera. La clase A podría ser, por ejemplo, la clase de los proletarios con conciencia de clase. Y la clase B podría ser la clase de los proletarios —sin más. Es evidente que la clase B es «más amplia» que la clase A. Es evidente que la clase B *incluye* la clase A. Dicho de otro modo: todos los proletarios con conciencia de clase son proletarios, pero no todos los proletarios son proletarios con conciencia de clase. Dicho todavía de otro modo: todos los miembros de la clase A son miembros de la clase B, pero no viceversa. Pues bien: cuando todos los miembros

Todo parece sencillo. Parece como si el condicional no plantease problemas. Pero el hecho es que el condicional lleva por lo menos veintidós siglos planteándolos. De algunos de ellos hablaremos más adelante, a todo lo largo de este apartado. De otros nos ocuparemos en otro lugar de esta obra. Por el momento nos limitaremos a incluir el signo '→' en nuestro repertorio creciente de signos constantes.

Juguemos ahora a formar expresiones en las que aparezcan esos cuatro signos constantes con que hasta ahora contamos. Por ejemplo:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \vee [(\neg q \wedge s) \rightarrow r]^{54},$$

de una clase, por el hecho de serlo, son también miembros de otra (aunque no necesariamente a la inversa), se dice que la primera *está incluida* en la segunda; se simboliza así

$$A \subset B$$

y se representa gráficamente así



A esta operación se le llama 'inclusión de clases'. Y a la clase incluida en otra se le llama '*subclase*' de esa otra (O bien, si preferimos utilizar la expresión 'conjunto', diremos que el conjunto incluido en otro es un *subconjunto* del primero.)

[54*] A esta expresión correspondería, en lógica de clases, esta otra:

$$[(A \cap B) \subset C] \vee [(-B \cap D) \subset C]$$

Ahora bien: en esta expresión hay algo extraño. Lo extraño es que en ella aparecen al mismo tiempo símbolos pertenecientes a la lógica de clases y símbolos pertenecientes a la lógica de enunciados.

Bien mirado, entre operaciones como '−', '∩' y '∪', por una parte, y operaciones como '⊂' hay una importante diferencia. Y es que mientras la aplicación de cualquiera de esas tres primeras operaciones a una o más clases *da como resultado una nueva clase* (de tal modo que, por ejemplo, el resultado de unir la clase A y la clase B es la *clase* unión de A y B), con '⊂' no ocurre nada semejante. Diremos, entonces, que símbolos como '−', '∩' y '∪' sirven para componer símbolos de clases y formar así símbolos más complejos que designan clases más complejas. Uniendo los símbolos simples de clases A, B, C, mediante el símbolo '∪', por ejemplo, obtenemos el símbolo '$A \cup B \cup C$', que designa la clase suma de las clases A, B y C.

El símbolo '⊂', en cambio, no sirve para componer nombres de clases y formar nombres compuestos, sino para componer enunciados *sobre* clases, para formar enunciados como, por ejemplo, el enunciado 'la clase A está incluida en la clase B'. Por eso en la expresión arriba reproducida aparece el signo de disyunción: porque la expresión arriba reproducida no es una suma de clases, sino una disyunción. En efecto: al aparecer en ella el símbolo '⊂' ya no podemos decir que se trate de un símbolo de clase compuesto con nombres de clases, como pudiera serlo la expresión

$$(-A \cup -B) \cap (B \cup -C),$$

sino de un enunciado que nos habla acerca de relaciones entre clases.

En resumen: mientras una expresión como

$$(-A \cap -B)$$

de la cual sería un ejemplo el enunciado

> Si acepto el mundo que me ofrecen y soy feliz así, entonces empiezo a cavar mi propia sepultura; o bien, si no soy feliz así, y no veo tampoco posibilidad de cambiar ese mundo, emprendo asimismo mi autoenterramiento.

Otra expresión en la que aparecen a la vez la negación, la conjunción, la disyunción y el condicional sería, por ejemplo:

$$[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow [\neg r \rightarrow (p \wedge q)],$$

cuya tabla de verdad procedemos a construir.

Puesto que son tres las proposiciones que intervienen, ocho serán las combinaciones de sus valores de verdad:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$\neg r$	$p \wedge q$	$\neg r \rightarrow (p \wedge q)$	$[(p \wedge q) \vee r] \rightarrow [\neg r \rightarrow (p \wedge q)]$
1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1

La expresión es verdadera en los ocho casos posibles. Ya veremos por qué esto era de esperar y ya veremos qué es lo que esto significa.

El bicondicional

Como sabemos, al decir 'si p, entonces q' estamos diciendo que p es condición suficiente de q, aunque no condición necesaria: es decir,

---

es un símbolo de clase, y se lee

> 'la *clase* intersección de la clase complemento de la clase A y la clase complemento complemento de la clase B',

una expresión como

$$A \subset (B \cup C)$$

es un enunciado sobre clases: a saber, el enunciado

> 'la clase A está incluida en la clase suma de la clase B y la clase C'.

que si es verdad que p es condición de q, del hecho de que se dé p podemos inferir formalmente que se dará q; pero del hecho de que se haya dado q no podemos inferir formalmente que se haya dado p. Cabe, en efecto, la posibilidad de que q se haya dado por otras causas, puesto que no hemos dicho que p sea la única causa de q.

Pero podríamos decirlo. Podríamos decir que p es a la vez condición *suficiente y necesaria* de q. Podríamos decir no simplemente

'si p, entonces q',

sino

'si *y sólo si* p, entonces q'.

Ahora bien: si es verdad que p es condición a la vez suficiente y necesaria de q, entonces, del hecho de que se haya dado p podemos inferir formalmente que se ha dado q, y del hecho de que se haya dado q podemos también inferir formalmente que se ha dado p. Quiere decirse, por tanto, que la expresión 'si y sólo si p, entonces q' equivale a la expresión

'si p, entonces q, y si q, entonces p'.

O, en símbolos,

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

O, en abreviatura,

$$(p \leftrightarrow q).$$

A esta operación —y a este nuevo símbolo '$\leftrightarrow$', y a este tipo de enunciados que tienen a '$\leftrightarrow$' como conectiva principal— le llamaremos, por razones que saltan a la vista, '*bicondicional*'. Y saltan a la vista también las razones por las que la tabla de verdad de un enunciado bicondicional será ésta:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Un enunciado bicondicional será verdadero en dos casos: cuando son verdaderos tanto su antecedente como su consecuente, y cuando tanto su

antecedente como su consecuente son falsos. Un enunciado como 'si, y sólo si p, entonces q', será, entonces, verdadero cuando p y q tengan el mismo valor de verdad [55*].

Juguemos ahora a introducir a la vez en una misma expresión los cinco signos constantes que conocemos. Por ejemplo, en

$$[(\neg p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee r]^{56*},$$

cuya tabla de verdad sería la siguiente:

p	q	r	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$	$(p \wedge \neg q) \vee r$	$[(\neg p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee r]$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1

[55*] Tomemos dos clases cualesquiera. Sea la clase A la clase de los lingüistas rigurosamente científicos, y la clase B la clase de los lingüistas que cultivan la lingüística generativo-transformacional. A estas dos clases les ocurre algo. Les ocurre que tienen exactamente los mismos miembros. Y dos clases que tienen los mismos miembros son *iguales*. La igualdad de clases la simbolizaremos así:

$$A = B$$

y la representaremos gráficamente de este modo:



Dos observaciones a este respecto:

1. El lector habrá notado ya que el símbolo '=' no sirve para componer nombres de clases, sino para componer enunciados sobre clases, para decir que tal clase es igual a tal otra.

2. No es lo mismo decir que dos clases tienen *los mismos* miembros —en cuyo caso, lo que estamos haciendo, como acabamos de ver, es decir que ambas clases son iguales, son *la misma* clase —que decir que tienen *el mismo número* de miembros— en cuyo caso diremos que son clases *equivalentes*. Es obvio que si dos clases son iguales son también, por fuerza, equivalentes. Es obvio, por otra parte, que la conversa no es verdadera. La clase formada por los miembros del conjunto *The Beatles* y la clase formada por los cuatro Profetas Mayores son equivalentes, pero distan mucho de ser iguales.

[56*] En lógica de clases,

$$[(-A \cup B) \subset C] \leftrightarrow [(A \cap -B) \cup C]$$

Sin apenas comentarios, porque los hechos en notas anteriores son extensivos a una expresión como ésta. '=' es un símbolo de la misma naturaleza que '⊂' y de naturaleza distinta a '−', '∩' y '∪'.

Un caso práctico

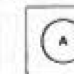
A modo de aplicación de todo lo dicho hasta ahora acerca de los signos constantes de la lógica de enunciados y de las condiciones de verdad de los enunciados compuestos con ellos, imaginemos el siguiente problema [57].

Supongamos que se nos entregan ocho tarjetas que poseen la siguiente característica: todas ellas tienen dibujado por una cara un triángulo y por la otra cara un círculo, de tal modo que si la cara visible de una tarjeta muestra un triángulo podemos tener la certeza de que habrá un círculo por la otra cara, y viceversa. Ahora bien: tanto los triángulos como los círculos pueden ser de dos colores: rojos o azules. Y aquí no hay seguridad: por ejemplo, si en una cara de una tarjeta aparece dibujado un triángulo rojo, sabemos que en la otra cara hay necesariamente un círculo, pero no sabemos si ese círculo es rojo o azul.

Supongamos ahora que de esas ocho tarjetas se eligen cuatro. Esas cuatro tarjetas tienen dibujadas, en sus caras visibles, estas cuatro figuras: un triángulo rojo, un círculo rojo, un círculo azul y un triángulo azul. Desconocemos, naturalmente, lo que *de hecho* hay en cada una de las caras no visibles.









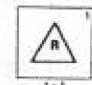
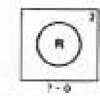
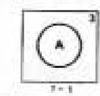
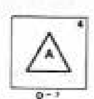
Es evidente que, en principio, la tarjeta 1 sólo puede tener, por la otra cara, o bien un círculo azul o bien un círculo rojo; la tarjeta 2, o bien un triángulo rojo o bien un triángulo azul; la tarjeta 3, o bien un triángulo azul o bien un triángulo rojo; y la tarjeta 4, o bien un círculo rojo o bien un círculo azul.

Supongamos, en fin, que se nos plantea un problema en los siguientes términos: «Alguien ha hecho un enunciado general que pretende ser verdadero de estas cuatro tarjetas. Ese enunciado dice así: '*En todas las tarjetas hay un triángulo rojo y un círculo azul*'. Pues bien: ¿cuál sería el número *mínimo* de tarjetas que habría que levantar para averiguar si el enunciado proferido por esa persona es verdadero o falso?»

Representemos mediante la variable p el enunciado 'En esta tarjeta

[57] Este problema es, en su origen, una prueba psicológica ideada por P. C. Wason para someter a contrastación ciertas implicaciones de la teoría de Piaget sobre el desarrollo, en el sujeto, de las estructuras lógicas. Lo que Wason presenta como experiencia para estudiar la comprensión de los enunciados condicionales por parte de los sujetos lo hemos convertido nosotros en un ejercicio para «repasar» la tabla de verdad de todas las conectivas estudiadas hasta el momento. Puede consultarse al respecto el artículo de P. C. Wason, «Regression in Reasoning», en *British Journal of Psychology*, 60, 4 (1969), págs. 471-80, y su libro, en colaboración con P. N. Johnson-Laird, *Psychology of Reasoning. Structure and Content*. Londres, Batsford, 1972.

—sea la 1, la 2, la 3 o la 4— hay un triángulo rojo' y por *q* el enunciado 'En esta tarjeta hay un círculo azul'. De las tarjetas podemos ver una sola cara, y ello nos permite conocer el valor de verdad de uno solo de los miembros de la conjunción en cada una de ellas:

Ahora bien: el enunciado a contrastar es una conjunción. Y una conjunción sólo es verdadera cuando lo son sus dos miembros. El enunciado a contrastar es, por otra parte, un enunciado general: «En *todas* las tarjetas hay un triángulo rojo y un círculo azul». Este enunciado universal equivale, por tanto, a la siguiente conjunción de enunciados singulares: «En la tarjeta 1 hay un triángulo rojo y un círculo azul y en la tarjeta 2 hay un triángulo rojo y un círculo azul y en la tarjeta 3 hay un triángulo rojo y un círculo azul y en la tarjeta 4 hay un triángulo rojo y un círculo azul».

Salta a la vista que ese enunciado no es verdadero. *No hace falta dar la vuelta a ninguna tarjeta* para saber que es falso, puesto que podemos ver ya que no se cumple ni en la tarjeta 2 ni en la tarjeta 4. Podría ciertamente cumplirse en las tarjetas 1 y 3, pero, aunque así fuera, seguiría siendo falso, en cuanto que se trata de un enunciado general que —por consiguiente— para ser verdadero habría de ser verdadero en *todas* las tarjetas.

¿Cómo resolveríamos el problema si el enunciado a contrastar, en lugar de ser un enunciado conjuntivo, fuera una disyunción: «En todas las tarjetas hay un triángulo rojo *o* un círculo azul»?

Los datos del problema siguen siendo los mismos:






Puesto que para que una disyunción sea verdadera basta con que lo sea uno de sus miembros, sabemos ya que el enunciado es verdadero en las tarjetas 1 y 3, independientemente de lo que haya en cada una de ellas por detrás. Así pues, para saber —que es de lo que se trata— si el enunciado es verdadero en todas, *tendríamos que levantar las tarjetas 2 y 4*. El enunciado general sería, entonces, verdadero si por el otro lado de estas dos tarjetas hubiera, respectivamente, un triángulo rojo y un círculo azul.

Cuando el enunciado a contrastar tiene la forma de un condicional, el problema se hace más difícil. Veamos por qué.

El enunciado en cuestión sería ahora éste: «En todas las tarjetas donde hay un triángulo rojo hay un círculo azul». Es decir: «Dada una tarjeta cualquiera, si en ella hay un triángulo rojo, entonces en ella hay también un círculo azul». Si adoptamos la primera formulación es porque, aun siendo menos explícita, es más natural.

¿Por qué es más difícil contrartar un enunciado como «En todas las tarjetas donde hay un triángulo rojo hay un círculo azul», que un enunciado como, por ejemplo, «En todas las tarjetas hay un triángulo rojo y un círculo azul»? En ambos casos se trata de enunciados compuestos de dos enunciados simples (de dos enunciados que, además, son los mismos). En un caso, el enunciado está compuesto con 'y'; en el otro, con 'si ..., entonces'. Pero ocurre que mientras en la conjunción —o en la disyunción, o, como veremos, en el bicondicional— *el orden de los enunciados es irrelevante* (es lo mismo, en efecto, decir «En todas las tarjetas hay un triángulo rojo y un círculo azul» que decir «En todas las tarjetas hay un círculo azul y un triángulo rojo», pues tanto monta '$p \wedge q$' como '$q \wedge p$'), en el caso del condicional los enunciados que lo componen están, por definición, *ordenados*: el uno hace de antecedente, y el otro, de consecuente; sus posiciones no son intercambiables, puesto que el uno enuncia la condición y el otro lo condicionado, y la primera precede siempre lógicamente al segundo. No es lo mismo decir «Si mueres, resucitarás» que decir «Si resucitas, entonces morirás». Por lo mismo, no es lo mismo decir «En todas las tarjetas en las que hay un triángulo rojo hay un círculo azul» que decir «En todas las tarjetas en las que hay un círculo azul hay un triángulo rojo».

El problema, por tanto, se hace más difícil cuando el enunciado a contrastar es un condicional porque en el caso de éste hay que considerar además el orden de los enunciados que lo componen. Un orden que no puede ser alterado so pena de transformar el enunciado en otro que no le es equivalente[58]. Puesto que el antecedente es 'Hay un triángulo rojo', resulta necesario, para quien intente resolver el problema, suponer que todas las tarjetas muestran un triángulo, y, por ende, suponer que dos de las tarjetas —la 2 y la 3— están vueltas, mostrando un triángulo cuyo color, sin embargo, desconocemos.

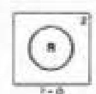
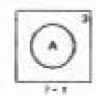
Desde el momento en que hemos sido capaces[59] de imaginarnos que las caras no visibles de estas tarjetas están a la vista, el problema

[58] El enunciado '$p \rightarrow q$' no es equivalente al enunciado '$q \rightarrow p$', como lo prueba el hecho de que sus tablas de verdad arrojan resultados distintos:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

[59] Y los datos de la psicología parecen indicar que no es fácil poseer —o, al menos, actualizar— esta capacidad.

deja prácticamente de ofrecer dificultades. Puesto que el condicional sólo es falso en un caso, a saber, cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso, hemos de levantar sólo aquellas tarjetas que hagan verdadero el antecedente[60], por ver si su cara no visible hace falso el consecuente (es decir, por ver si en el otro lado aparece dibujado un círculo rojo), y en ese caso el enunciado a contrastar sería falso; y aquellas otras que hacen falso el consecuente[61], por ver si en su cara no visible tienen dibujado un triángulo rojo (es decir, por ver si hacen verdadero el antecedente, *que está oculto, pero que hay que imaginar visible con sus dos posibilidades de color*), y en ese caso el enunciado sería asimismo falso:


Habría pues, que levantar las tarjetas 1 y 2[62].

Nos queda por examinar el caso en que el enunciado cuyo valor de verdad hemos de determinar es un bicondicional. Ese enunciado bicondicional podríamos formularlo así: «Solamente hay un círculo azul en aquellas tarjetas en las que hay un triángulo rojo»[63]. O también, puesto que el bicondicional no es, como hemos visto, sino una conjunción de condicionales, así: «En todas las tarjetas en las que hay un triángulo rojo hay también un círculo azul, y en todas las tarjetas en las que hay un círculo azul hay también un triángulo rojo»[64].

¿Qué tarjetas habría que levantar para averiguar el valor de verdad de un enunciado como éste? La respuesta es: *todas.*

En efecto: un enunciado bicondicional es verdadero cuando y sólo cuando los enunciados que lo componen tienen el mismo valor de verdad, es decir, cuando ambos son verdaderos a la vez o cuando ambos son falsos a la vez. Por tanto, sólo podemos determinar el valor de verdad de un enunciado bicondicional si conocemos los valores de verdad de los dos enunciados que lo integran. Y en este problema sólo conocemos, en cada tarjeta, el valor de uno de ellos. Es necesario, pues, para conocer en cada caso el otro, dar la vuelta a las cuatro tarjetas.

---

[60] Es decir, aquellas que ostenten (o puedan ostentar por su cara no visible que, en ese caso, habría que considerar como antecedente) un triángulo rojo.

[61] Es decir, aquellas en las que aparece dibujado un círculo que no es azul, sino rojo.

[62] E incluso podría bastar con levantar una sola de ellas, la 1, en el caso de que esta primera tarjeta hiciera ya falso el enunciado, con lo cual resultaría ocioso dar la vuelta también a la otra.

Con frecuencia resulta difícil para el lector —y aún más para el sujeto de la prueba— comprender por qué no es necesario levantar la tarjeta 3. La razón es clara: porque o bien esa tarjeta tiene por el lado no visible un triángulo rojo, con lo cual no hace sino confirmar una vez más, de modo redundante, el enunciado en cuestión, o bien tiene por el otro lado un triángulo azul, y en ese caso —exactamente por las mismas razones que la tarjeta 4— resulta irrelevante para el asunto que nos ocupa.

[63] Esta formulación suena mejor, aunque es menos literal, menos «canónica», que esta otra: «Si y solamente si en una tarjeta hay un triángulo rojo, entonces hay también un círculo azul.»

[64] O, más literalmente: «Si en una tarjeta hay un triángulo rojo, entonces hay también un círculo azul, y si en una tarjeta hay un círculo azul, entonces hay también un triángulo rojo.»

Lenguaje lógico y lenguaje cotidiano

Antes de proceder a presentar los demás signos constantes de la lógica de enunciados parece necesario detenerse un instante a reflexionar en torno a las relaciones entre esos signos y las expresiones del lenguaje ordinario —'no', 'y', 'o', 'si..., entonces...', etc.— a las que parecen, de algún modo, corresponder.

Podríamos sentirnos tentados a pensar que los signos constantes del lenguaje de la lógica de enunciados corresponden estrictamente a las llamadas «conjunciones» —copulativas, disyuntivas, etc.— del lenguaje ordinario: es decir, que a cada signo constante corresponde una y una sola conjunción, y que a cada conjunción corresponde uno y un solo signo constante.

Pues bien: no ocurre así. Ni cada constante lógica corresponde a una única conexión entre enunciados en el lenguaje ordinario, ni tampoco todas las conjunciones del lenguaje ordinario tienen una traducción al lenguaje lógico.

Ya hemos dicho —y hemos empezado a mostrar— que el lenguaje de la lógica es un lenguaje artificial. Y los lenguajes artificiales son lenguajes restringidos, lenguajes con un radio de expresión corto. Son lenguajes diseñados especialmente para formular sólo determinadas cosas. Sin embargo, si su capacidad expresiva es menor, es mayor su precisión que la de cualquier lengua. Los lenguajes naturales sirven para todo. Los lenguajes artificiales sirven a un objetivo concreto. Y esa misión específica la cumplen con mayor exactitud que el lenguaje ordinario —cuya ambigüedad es, por lo demás, algo a celebrar en muchos casos.

Sabemos ya por qué las ciencias utilizan, en mayor o menor grado, lenguajes especiales: porque cada ciencia tiene su propio objeto de estudio, y, en consecuencia, sus propias necesidades expresivas. La lógica tiene por objeto el estudio de la validez formal de las inferencias. Las inferencias, los razonamientos, aparecen inevitablemente formulados en el lenguaje —en algún lenguaje—. Al lenguaje hay, pues, que acudir para analizarlos. El análisis lógico del razonamiento acarrea, pues, el análisis lógico del lenguaje. De ese análisis lógico del lenguaje resulta el lenguaje artificial de la lógica. En general, el lenguaje de una ciencia procede, por una parte, de un análisis «desinteresado» (es decir, objetivo, sin prejuicios, aunque con hipótesis) de un determinado campo de objetos

—el de los números, el de las transformaciones sociales, el de los movimientos de los cuerpos celestes—, y, por otra parte, de un análisis «interesado» del lenguaje natural, de un análisis del lenguaje natural interesado en señalar —para subsanarlas— las deficiencias expresivas del lenguaje natural respecto de ese campo de objetos, aquello que el lenguaje natural no puede decir acerca de esos objetos con la precisión requerida. Así nacen —así se justifican— los lenguajes artificiales en los que hallan expresión los enunciados de la ciencia. Así se justifica también el lenguaje de la lógica: sólo que en este caso, y por la razón de que el objeto de esta ciencia —los razonamientos— sólo se constituye como tal en cuanto dado en un lenguaje, el análisis de su objeto peculiar y el peculiar análisis del lenguaje que esa ciencia conlleva se confunden de hecho. El análisis del lenguaje que la lógica lleva a efecto es, pues, un análisis que busca en el lenguaje aquellos y sólo aquellas elementos que sean relevantes para la validez formal de los razonamientos. La lógica analizará simplemente los rasgos lógico-formales del lenguaje ordinario. De ese análisis resultará el lenguaje de la lógica, que se constituye integrando esos elementos extraídos del lenguaje ordinario en la estructura de un cálculo. El lenguaje lógico es, pues, en el sentido literal del término, un lenguaje *abstracto*: un lenguaje construido abstrayendo del lenguaje ordinario determinados aspectos, determinados usos, determinados tipos de expresiones que son relevantes desde el punto de vista lógico-formal. El lenguaje lógico retiene del lenguaje natural aquello que interesa a la lógica, y prescinde de todo lo demás. En él sólo quedan recogidos y reorganizados aquellos elementos del lenguaje que se utilizan para urdir razonamientos. Hacer lógica consiste, pues, en analizar formalmente las inferencias y en traducir luego los resultados de ese análisis a un lenguaje contruido precisamente con el propósito de que en él resplandezca la forma de las inferencias.

Quizá lo mejor sea ver todo esto con un ejemplo.

Tomemos un texto cualquiera

> Cuando uno no tiene imaginación, la muerte es poca cosa; cuando uno la tiene, la muerte es demasiado[65].

¿Cuál sería el resultado del análisis lógico de este texto? Quizá sea triste, pero es éste:

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$$

El texto se compone, en efecto, de dos enunciados, compuestos ambos, separados por un punto y coma. Visto desde la perspectiva del lenguaje lógico, un punto y coma sin más equivale a una conjunción. Cada

[65] Louis-Ferdinand Céline: *Voyage au bout de la nuit.*

uno de los dos enunciados es un condicional, puesto que en este contexto la conjunción 'cuando' desempeña la misma función lógica que la conjunción 'si..., entonces...'. Por lo demás, el enunciado 'uno no tiene imaginación' es, obviamente, la negación de 'uno la tiene', razón por la cual podemos esquematizar uno y otro por '$\neg p$' y 'p', respectivamente. Otro tanto cabe decir acerca de 'la muerte es poca cosa' (q) y 'la muerte es demasiado' ($\neg q$).

Hemos, pues, traducido un fragmento del lenguaje ordinario al lenguaje artificial de la lógica. En el curso de la traducción se han perdido matices, y matices importantes (si es que se puede decir que el contenido entero de un texto es un «matiz» de éste); pero no se trata de matices importantes desde el punto de vista lógico. Porque lo único importante desde un punto de vista lógico es la estructura del enunciado, y eso no sólo no lo hemos perdido, sino que lo hemos retenido en solitario; clarificándolo, por añadidura.

El lenguaje de la lógica no es, por tanto, sino la presentación formalizada de determinados rasgos o aspectos del lenguaje ordinario, algo así como la «puesta en limpio» de toda una zona de nuestro lenguaje cotidiano, la formalización del lenguaje en cuanto medio de expresión de inferencias, en cuanto instrumento para enunciar razonamientos con una determinada forma. En el lenguaje ordinario encontramos, en efecto, argumentaciones, razonamientos, inferencias. Es decir, en el lenguaje ordinario hallamos expresiones de carácter lógico-formal. Lo que el lógico formal hace es extraer del lenguaje natural esas expresiones, aislarlas, e integrarlas en una estructura de cálculo interpretando con ellas los elementos de éste.

Y, ¿cuál es, entonces, la relación entre ese lenguaje formalizado y la parte del lenguaje natural a la que parace corresponder? ¿Cuál es la relación entre los signos del lenguaje lógico y los signos paralelos en el lenguaje ordinario? Ya hemos dicho en un principio que no hay una estricta correspondencia entre unos y otros. Ni a cada signo lógico corresponde una y una sola expresión del lenguaje ordinario, ni viceversa. La relación entre ellos no es de *uno* a *uno*, sino de *uno* a *muchos*, o bien, en otras ocasiones, de *muchos* a *uno*. Veamos cómo y por qué.

Del lenguaje natural, en comparación con el lenguaje lógico, se pueden decir dos cosas: que es demasiado rico, o que es demasiado pobre. Y no se trata de una contradicción, puesto que cada cosa se dice en un sentido distinto.

En un cierto sentido se puede decir que el lenguaje natural —cualquiera de las lenguas— es superabundante desde el punto de vista lógico[66], es decir, que para expresar una misma relación lógica, el lenguaje natural se permite utilizar distintas expresiones.

[66] Se ha dicho a menudo que el lenguaje se queda corto ante la realidad, que se muestra torpemente inexpresivo ante las muchas y diversas cosas que queremos expresar; pero también cabría afirmar en algún sentido que el lenguaje es superabundante, que

Veamos un ejemplo. Sean los diez enunciados siguientes:

(1) Es agradable caminar bajo la lluvia, siempre que se tenga algo suficientemente triste en que pensar.

(2) Si la tarde está oscura, me invadirá el optimismo.

(3) Cuando alguien escribe como Borges, puede disculpársele todo.

(4) Bien pensado, no hay por qué ser bienpensante.

(5) Como siga aparentando tanta felicidad, empezaré a pensar que sufre considerablemente.

(6) Se puede decir que Marx era un hegeliano, con tal de que se aclare en qué sentido y hasta qué punto.

(7) En no habiendo vino no hay ya amor (Eurípides).

(8) Tú dedícate al amor libre y verás cómo te sorprende la muerte en pecado mortal.

(9) En caso de que sople el viento, podremos navegar a vela.

(10) De haberlo meditado bien, no me hubiera atrevido a escribir este libro.

Pues bien: estas diez frases, tan distintas por lo demás, se reducen, desde el punto de vista lógico, a ésta:

$$p \rightarrow q$$

Todas ellas, en efecto, pueden tomar esta forma:

(1) *Si* se tiene algo suficientemente triste en que pensar, *entonces* es agradable caminar bajo la lluvia.

(2) *Si* la tarde está oscura, *entonces* me invadirá el optimismo.

(3) *Si* alguien escribe como Borges, *entonces* puede disculpársele todo.

(4) *Si* bien se piensa, *entonces* no hay por qué ser bienpensante.

(5) *Si* sigue aparentando tanta felicidad, *entonces* empezaré a pensar que sufre considerablemente.

(6) *Si* se aclara en qué sentido y hasta qué punto, *entonces* se puede decir que Marx era un hegeliano.

(7) *Si* no hay vino, *entonces* ya no hay amor.

(8) *Si* te dedicas al amor libre, *entonces* la muerte te sorprenderá en pecado mortal.

(9) *Si* sopla el viento, entonces podremos navegar a vela.

(10) *Si* lo hubiera meditado bien, *entonces* no me hubiera atrevido a escribir este libro.

Donde se echa de ver que en el lenguaje lógico no hay preocupaciones de estilo.

dispone de «demasiadas palabras», que tiene muchas maneras distintas de decir una misma cosa. Todo depende quizá de si queremos decir demasiado o demasiado poco.

La estructura lógica es la misma en todos los casos, aunque esté representada en cada caso por giros lingüísticos distintos. Así, una expresión como

> Ese lapso, corto quizá *si* se le mide por el calendario, es interminablemente largo *cuando*, como yo, se ha galopado a través de él[67].

se reduciría, en un análisis lógico, a esto:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$$

es decir:

> Si se le mide por el calendario, entonces ese lapso de tiempo es corto, y si se ha galopado, como yo, a través de él, entonces es interminablemente largo.

El análisis lógico es, pues, en este sentido, un análisis reductivo: un análisis que reduce la diversidad lingüística a una unidad lógica. *Varios* signos lingüísticos —'si..., entonces...', 'cuando..., entonces...', '... con tal que...', etc.— se reducen a *un solo* signo lógico: '→'.

Otras veces, sin embargo, ocurre a la inversa: a un solo signo del lenguaje natural corresponde más de una constante lógica. En este segundo sentido, el análisis lógico no reduce, sino que explicita. Veamos algunos ejemplos:

(1) Miré los muros de la patria mía / *si* un tiempo fuertes ya desmoronados (Quevedo).

(2) Caminara siete leguas / sin encontrar cosa viva / *si* no fuere cuervos negros / que los perros no querían (*Romance de la muerte ocultada*).

(3) Y en prueba de cuanto te digo, ve a Delfos, pregunta a los oráculos y mira *si* ha faltado a la verdad mi mensaje (Sófocles).

(4) ¿Adocenarte? ¡¡Tú... del montón!? ¡*Si* has nacido para caudillo! (Escrivá).

(5) ¿Qué es ese azul que apenas *si* es montaña, *si* es nieve, *si* es azul? (Alberti).

(6) Compañero en el trabajo soy con los obreros, que *si* ellos ejercitan músculos en los cuales se consumen las energía físicas, yo también, en otro orden de trabajo, consumo sustancias del cuerpo para poder arrancar un átomo al cerebro (Nicolás Salmerón).

(7) *Si* alguna vuelta he cantao / ante panzudos patrones / he picaniao las razones / profundas del proberio (A. Yupanqui).

[67] Kafka (los subrayados son nuestros).

(8) *Si* podemos presumir un descuido por parte de uno, dos o tres, sin duda el cuarto hubiera pensado en ello (E. Allan Poe).

En todos estos enunciados aparece el término 'si'. No todos esos enunciados, sin embargo, son propiamente condicionales. En el caso 3, por ejemplo, el 'si' sirve para introducir una oración interrogativa indirecta; en el caso 8 —como en el 1— esa partícula parece tener sentido adversativo, equivalente a 'si bien', 'aunque' o 'mientras'. ¿Qué decir, por otra parte, del 'si' de 'apenas *si* es montaña'? Etcétera.

El análisis lógico revela, pues, la existencia de una diversidad profunda por debajo de la aparente uniformidad. Lo lingüísticamente idéntico resulta ser lógicamente diverso. Otro tanto ocurre en los ejemplos siguientes:

(1) Cuando Randolph Carter cumplió los treinta años, perdió la llave de la puerta de los sueños (Lovecraft).

(2) Cuando nació Buonarroti, Mercurio y Venus ascendían, triunfales, desnudos, hacia el trono de Júpiter (M. Mújica Lainez).

(3) Cuando en el juego no intervienen el amor y el odio, la mujer juega de manera mediocre (Nietzsche).

(4) Cuando empiece la guerra, quizá nuestros hermanos se transformen (Brecht).

Vemos aquí, aún más claramente que en el ejemplo anterior, que todos los enunciados tienen la misma estructura lingüística. Pero no la misma estructura lógica. De los cuatro, sólo uno de ellos, el tercero, es un condicional. En él la expresión 'cuando' podría ser sustituida por 'si..., entonces...' sin que cambiara el sentido del enunciado, cosa que no ocurre en los otros casos. En ellos, el término 'cuando' no está empleado en su acepción condicional, sino con su sentido temporal. Es evidente que el segundo enunciado, por ejemplo, no sería equivalente a este otro:

Si nació Buonarroti, entonces Mercurio y Venus ascendían, triunfales, desnudos, hacia el trono de Júpiter.

Digamos, con Wittgenstein, que el lenguaje, lejos de constituir una unidad, no es sino repertorio indefinidamente ampliable de *juegos de lenguaje*, de sistemas de comunicación distintos entre sí, que engranan con el mundo de diversos modos y se gobiernan por distintos conjuntos de reglas. Cantar es, por ejemplo, un juego de lenguaje. Lo es también relatar historias, dar órdenes, rezar o insultar. Cuando yo digo «el día había transcurrido del modo como suelen transcurrir estos días» estoy jugando —repitiendo a Herman Hesse— a contar algo. Cuando digo «Perdónanos nuestras deudas» estoy jugando a suplicar. Cuando digo «Si no estoy preocupado por ese asunto, entonces es que no soy un neurótico. Pero, puesto que soy un neurótico, ese asunto me preocupa»[68], estoy jugando a razonar, a inferir unos enunciados a partir de otros. Y es que hay un juego de lenguaje, una forma de jugar con el lenguaje *ordinario*, que consiste en razonar, en hacer inferencias. Pues bien: el lenguaje de la lógica, construido sobre la base de este juego ordinario de lenguaje, es un juego de lenguaje *formalizado* que consiste, pura y simplemente, en razonar. Las relaciones entre el juego de la lógica en el lenguaje ordinario y el juego de la lógica en un lenguaje formalizado no se pueden establecer de una vez por todas. Hemos dicho ya que el segundo es una reconstrucción, una «puesta en limpio» del primero: las reglas de razonamiento, que en aquél eran vagas e implícitas, se vuelven en éste explícitas y precisas; la estructura de los razonamientos, que en aquél estaba oculta o incluso desfigurada, se hace en éste patente a solas. La traducción de un lenguaje a otro no es una traducción automática. Exige, como toda traducción, percepción de matices, imaginación, atención, en suma, a un contexto ilimitado.

El conjunto de las conectivas

Hemos enumerado, hasta ahora, cinco conectivas: la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional. Es claro que la enumeración no es exhaustiva. Son posibles, evidentemente, otras muchas formas de conexión entre enunciados. ¿Cuántas?

Antes de responder a esta pregunta es necesario poner de relieve una diferencia importante entre la negación, por una parte, y, por otra parte, las otras cuatro conectivas hasta ahora mencionadas. La diferencia es ésta: mientras que la operación llamada 'negación' se aplica cada vez a *una sola* proposición, sea ésta simple, como

$$\neg p,$$

o compuesta, como

$$\neg (p \vee q),$$
$$\neg [(p \wedge q) \rightarrow r],$$
$$\text{etc.},$$

cualquiera de las otras conectivas que hemos visto alcanza siempre

[68] En símbolos:

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

Se trata de un razonamiento formalmente válido. El esquema correspondiente se conoce, como veremos, desde antiguo, y recibe modernamente, como también veremos, el nombre de 'ley de contraposición (del condicional)'.

a *dos* enunciados, necesita al menos dos enunciados para poder aplicarse. No podríamos, en efecto, construir expresiones de este tipo:

$$p \wedge$$
$$\vee\ q$$
$$p \rightarrow$$
$$\leftrightarrow q$$
etc.

Dicho de otro modo: la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional son conectivas *diádicas* o *binarias*. La negación, en cambio, es una conectiva *monádica* o *singularia*.

Pues bien: ¿cuántas son las conectivas monádicas? Y, ¿cuántas las diádicas? Es decir: ¿cuántas operaciones pueden realizarse con una sola proposición? ¿Y con dos proposiciones?

Con una sola proposición se pueden llevar a cabo *cuatro* operaciones. Hay cuatro conectivas monádicas, por tanto.

Con dos proposiciones son posibles *dieciséis* operaciones[69]. Son, pues, dieciséis las conectivas diádicas.

¿Por qué?

No porque de hecho sólo hayamos encontrado cuatro y dieciséis, respectivamente, sino porque, por principio, son cuatro y dieciséis, y no pueden ser ni menos ni más.

Veamos primero por qué las conectivas diádicas son, de una vez por todas, exactamente dieciséis[70].

Hemos dicho que, dados dos enunciados cualesquiera, son cuatro las combinaciones que pueden hacerse de sus valores de verdad. Lo representábamos así:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Ahora bien: puesto que la falsedad de un enunciado supone la verdad de su negación (y viceversa, por supuesto) cabría dar a estas cuatro combinaciones la siguiente forma:

$$\begin{matrix} \text{a} & & \text{b} & & \text{c} & & \text{d} \\ (p \wedge q) & \vee & (p \wedge \neg q) & \vee & (\neg p \wedge q) & \vee & (\neg p \wedge \neg q), \end{matrix}$$

[69] Con tres proposiciones, 256 operaciones. Con cuatro, 65.536. Con cinco, 4.294.967.296. Etcétera.

[70] Aunque sería más natural empezar por las cuatro conectivas monádicas, nos parece que la alteración del orden ha de servir para una mejor comprensión del asunto.

Es decir: que o bien p y q son verdaderos (caso *a*); o bien p es verdadero y q es falso (en cuyo caso $\neg q$ será verdadero) (caso *b*); etc.

En lo que sigue, y con el único fin de abreviar la explicación, designaremos cada una de las cuatro combinaciones con las letras *a*, *b*, *c*, *d*.

Nos encontramos, pues, con un conjunto de cuatro elementos:

$$\{a, b, c, d\}$$

¿Cuántos subconjuntos tiene este conjunto?

Antes de nada: ¿a qué llamamos subconjunto?

Recordémoslo: llamamos subconjunto de un conjunto dado a todo conjunto incluido en éste. Así, si

$$A \subset B,$$

diremos que A es un subconjunto de B.

Ya hemos dicho también[71] que un conjunto está incluido en otro cuando todos los miembros del primero son miembros del segundo (aunque no necesariamente a la inversa).

Entonces, ¿cuántos subconjuntos así definidos tendrá ese conjunto de cuatro elementos? Tendrá dieciséis[72]. Estos:

$$\{a\}\ \{b\}\ \{c\}\ \{d\}$$
$$\{a, b\}\ \{a, c\}\ \{a, d\}\ \{b, d\}\ \{b, c\}\ \{c, d\}$$
$$\{a, b, c\}\ \{a, b, d\}\ \{a, c, d\}\ \{b, c, d\}$$

Tenemos, hasta el momento, catorce. Es evidente que todos ellos cumplen la definición que hemos dado de subconjunto. Por ejemplo, el conjunto $\{a\}$, es decir, el conjunto que tiene a a como único miembro está incluido en —y es, por ende, un subconjunto de— el conjunto $\{a, b, c, d\}$. De igual modo, el conjunto $\{a, c\}$, por ejemplo, es un subconjunto del conjunto $\{a, b, c, d\}$: todos los miembros del primero son, efectivamente, miembros del segundo.

Nos faltan todavía, sin embargo, dos subconjuntos de ese conjunto. Son éstos:

$$\{a, b, c, d\}$$
$$\phi$$

y parecen requerir algún comentario.

[71] Y lo diremos de manera más técnica y precisa en un capítulo posterior.

[72] En general, y como fórmula, si un conjunto tiene n miembros, sus subconjuntos serán en número de 2^n. Así pues, si el conjunto que nos ocupa tiene, como de hecho tiene, 4 elementos, tendrá 2^4, es decir, dieciséis subconjuntos.

En primer lugar, podría tenerse por paradójica la afirmación de que un conjunto es un subconjunto de sí mismo. Pues lo es, y para comprenderlo basta con atenerse estrictamente a la definición de subconjunto: un conjunto es subconjunto de otro cuando todos los miembros del primero son miembros del segundo, *aunque no necesariamente a la inversa*. No es necesario que se dé la inversa, pero nada impide tampoco que se dé. Es evidente, entonces, que todos los miembros del conjunto $\{a, b, c, d\}$ son miembros del conjunto $\{a, b, c, d\}$, y, por ello, puede decirse que el primero es un subconjunto del segundo (un subconjunto, como se dice, *impropio*. Todo conjunto es un subconjunto impropio de sí mismo).

El símbolo ϕ designa el conjunto vacío. Conjunto vacío es aquel que carece de miembros. Se nos podría decir que son infinitos los conjuntos que carecen de miembros: el conjunto, por ejemplo, de los reyes de España en ejercicio entre 1931 y 1973, el de los moluscos voladores, el de los stalinistas de la IV Internacional, el de los dinosaurios arrianos, etcétera. Pero ya hemos dicho que los conjuntos que tienen los mismos miembros son iguales, son el mismo conjunto. Y todos los conjuntos vacíos tienen, en un determinado sentido, los mismos miembros, a saber: ninguno. Por tanto, en rigor hay un único conjunto vacío, y por eso hablamos de '*el* conjunto vacío'.

Pero, ¿por qué el conjunto vacío es un subconjunto del conjunto $\{a, b, c, d\}$? Pues porque el conjunto vacío es un subconjunto de *todo* conjunto. Y esto, a su vez, ¿por qué?

La tabla de verdad del condicional

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

podría parafrasearse diciendo que un condicional con consecuente verdadero es ya verdadero independiente de cuál sea el valor de verdad del antecedente (casos 1-1 y 0-1); y que un condicional con antecedente falso es ya verdadero también (caso 0-1 y 0-0). Es esto último lo que nos interesa.

En efecto: decir que la clase A está incluida en la clase B es tanto como decir que, dado un objeto cualquiera, x, *si* x es un miembro del conjunto A, *entonces* x es también miembro del conjunto B.

Esta última expresión es, como bien sabemos, un condicional. Ahora bien: si suponemos que ese conjunto A es el conjunto vacío, resultará que ese condicional tendrá un antecedente falso, puesto que, por definición, no hay ningún x que sea miembro de la clase A. El condicional

construido con ese antecedente será, pues, verdadero. Y, en consecuencia, siempre se podrá decir con verdad que el conjunto vacío está incluido en un conjunto, sea éste el que fuere. El conjunto vacío es, pues, un subconjunto de todo conjunto.

Tenemos ya, pues, los dieciséis subconjuntos. Pero, ¿qué es lo que estos dieciséis conjuntos representan? ¿Qué representa, por ejemplo, el subconjunto $\{a\}$? Representa el hecho de que de los cuatro pares de enunciados

$$(p \wedge q), (p \wedge \neg q), (\neg p \wedge q) \text{ y } (\neg p \wedge \neg q),$$

sólo el primero, $(p \wedge q)$, es verdadero. Es decir: que ese subconjunto corresponderá a una conectiva cuya tabla de verdad será la siguiente: 1, 0, 0, 0. El subconjunto $\{b, d\}$ representará que son verdaderos los pares segundo y cuarto, y falsos los otros dos. Corresponderá, por tanto, a una conectiva cuya tabla de verdad sería ésta: 0, 1, 0, 1. Etcétera. Tenemos, así, dieciséis casos:

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

Que podríamos representar también así:

1	2	3	4	5	6	7	8
$p \wedge q$	—	—	—	$p \wedge q$	$p \wedge q$	$p \wedge q$	—
—	$p \wedge \neg q$	—	—	$p \wedge \neg q$	—	—	$p \wedge \neg q$
—	—	$\neg p \wedge q$	—	—	$\neg p \wedge q$	—	—
—	—	—	$\neg p \wedge \neg q$	—	—	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$

9	10	11	12	13	14	15	16
—	—	$p \wedge q$	$p \wedge q$	$p \wedge q$	—	$p \wedge q$	—
$p \wedge \neg q$	—	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q$	—	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q$	—
$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	—	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge q$	—
—	$\neg p \wedge \neg q$	—	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	—

Entonces, la conectiva núm. 10, por ejemplo, corresponde al subconjunto $\{c, d\}$. La núm. 13, al subconjunto $\{a, c, d\}$. Etcétera.

Como el lector habrá observado, la conectiva que lleva el núm. 1 es la conjunción. El bicondicional es el número 7. La disyunción es el número 11. Y la conectiva que lleva el número 13 es el condicional. Estas son las únicas que por ahora conocemos.

Por el mismo procedimiento podemos llegar a establecer las cuatro conectivas monádicas.

Dado un enunciado, dos pueden ser sus valores:

p
V
F

Es decir:

$$\begin{matrix} a & b \\ p & \vee \neg p \end{matrix}$$

Nos hallamos ahora ante un conjunto que tiene dos miembros:

$$\{a, b\}$$

Este conjunto tendrá 2^2, es decir, 4 subconjuntos. Estos:

$$\{a\} \ \{b\} \ \{a, b\} \ \phi,$$

a los que corresponderán las cuatro conectivas siguientes:

p	1	2	3	4
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Todo ello podríamos representarlo también, como antes hemos hecho, así:

1	2	3	4
p	—	p	—
—	¬ p	¬ p	—

La número dos, es decir, la que invierte los valores de la proposición de partida, es, como sabemos, la negación.

Las conectivas como funciones de verdad

Disponemos ya, por tanto, de veinte signos constantes en total. Hemos dicho, un tanto vagamente, que la misión de estos signos constantes de la lógica de enunciados —y de ahí uno de sus nombres, el de «conectivas»— era la de servir de enlace entre variables, la de conectar proposiciones. Pero, ¿cómo podríamos caracterizarlas con más precisión? ¿Cuál es, en rigor, su naturaleza?

Son *funciones*. *Funciones de verdad*. O, al menos, como tales pueden entenderse.

¿Qué es una función?

Empezando por el principio, y a la espera de una definición más estricta que en su momento daremos, podemos decir que una función es un tipo especial de relación. De relación, ¿entre qué?

Tomemos una expresión como

$$x^2 + 7.$$

Del valor que demos a x dependerá el valor de esa expresión entera. Si damos a x el valor '5', la expresión valdrá '$5^2 + 7$', es decir, '32'. Si x vale '2', la expresión tomará el valor '11'. Etcétera.

O bien, con otro ejemplo:

El lugar donde nació x

Si en vez de x escribimos 'William Shakespeare', la expresión entera se convertirá en una descripción de Stratford-on-Avon. Si escribimos 'Julio Cortázar', estaremos refiriéndonos a Bruselas. Etc.

Tomemos un tercer ejemplo. Sea la expresión

y es el doble de x

Es evidente que y está en función de x: del valor que *demos* a x dependerá el valor que *tome* y. Si a x le damos el valor '12', y tomará el valor '24'. Si a x le damos, en cambio, el valor '273', y tomará el valor '546'. Por eso se dice que x es, en este caso, la variable *independiente*, la variable a la que le asignamos arbitrariamente un valor cualquiera de entre los que constituyen su campo de valores, mientras que y sería la variable *dependiente*, aquella cuyo valor queda automáticamente determinado al asignarle un valor a la variable independiente[73].

Una función es, por tanto, una relación entre dos campos: el campo de los valores que se pueden asignar a la variable independiente —a los que llamaremos «argumentos de la función»— y el campo de los valores,

[73] Podríamos también interpretar esa expresión funcional de tal modo que fuera el valor de x el que dependiera del valor otorgado a y. Si a y le damos el valor 36, el valor de x será 18; si damos a y el valor 280, el de x será 140; etc.

que, en correspondencia con aquéllos, toma la variable dependiente —y a los que llamaremos propiamente «valores de la función». Así, en el ejemplo citado, '24', en el primer caso, y '546', en el segundo, son los nombres del valor de la función cuando los valores del argumento de la función llevan, respectivamente, los nombres '12' y '273'.

Y pensemos, en cuarto lugar, en expresiones funcionales del siguiente tipo:

El autor de x es Henry Purcell

Podemos dar libremente valores a x. Podemos darle, por ejemplo, el valor 'Concierto de Brandeburgo n.º 1' Preguntémonos ahora cuál sería el valor de la expresión

El autor del *Concierto de Brandeburgo n.º 1* es Henry Purcell

Este enunciado es falso. ¿Cuál será, en este caso, el valor de la función? En el primer ejemplo que hemos puesto, el valor de la función era un número. En el segundo, el nombre de un lugar. En el tercero, de nuevo un número. En el cuarto, el valor de la función es *un valor de verdad*. Según el valor que asignemos al argumento, la expresión será verdadera o falsa. La verdad y la falsedad serán los valores posibles de la función, el campo de valores de ésta.

Si las examinamos ahora más de cerca, observamos que cada una de las conectivas constituye una operación, que aplicada —en el caso de las conectivas diádicas— a dos enunciados poseedores de unos determinados valores de verdad, da lugar a nuevos valores de verdad. Así, la conectiva '↔', por ejemplo, es una operación que, aplicada a dos proposiciones, p y q, cuando p vale 1 y q vale 1, da el valor 1; cuando p vale 1 y q vale 0, da el valor 0; cuando p vale 0 y q vale 1, da el valor 0; y cuando p vale 0 y q vale 0, da el valor 1. Y así con todas las demás conectivas, tanto monádicas como diádicas.

Dicho de otro modo: el valor de verdad de un enunciado compuesto con una conectiva —tal como, dicho sea en esquema, '$p \vee q$', '$(p \wedge q) \rightarrow r$', etcétera— es una función de los valores de verdad de los enunciados que lo componen. Estos serán los argumentos de la función, y aquél el valor de ésta. Esa es la razón de que las conectivas a menudo se las llame también 'functores'.

Así, por ejemplo, en lugar de presentar el condicional de la forma en que hemos hecho hasta ahora

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

podríamos caracterizarlo como aquella función —llamémosla f_{13}, ya que 13 es el número que corresponde al condicional en la tabla que hemos dado de las conectivas diádicas— tal que, aplicada a dos enunciados con unos determinados valores de verdad, da como resultado los siguientes valores:

$$f_{13}(1, 1) = 1$$
$$f_{13}(1, 0) = 0$$
$$f_{13}(0, 1) = 1$$
$$f_{13}(0, 0) = 1$$

La conjunción, por su parte, podría representarse así:

$$f_1(1, 1) = 1$$
$$f_1(1, 0) = 0$$
$$f_1(0, 1) = 0$$
$$f_1(0, 0) = 0$$

Etcétera.

Las conectivas pueden, por tanto, interpretarse como funciones. Como funciones *de verdad*. En efecto: los argumentos de estas funciones son valores de verdad —los valores, 1 o 0, de los enunciados simples—; y los valores de la función son también valores de verdad —los valores, 1 o 0, del enunciado compuesto con la conectiva. Son, pues, los valores de verdad lo único que interviene. Mejor dicho: en rigor, es lo único que podría intervenir. En efecto: un enunciado transmite un determinado contenido y, a la vez, posee un determinado valor de verdad. Pero al esquematizar, como hacemos en lógica, los enunciados concretos por variables de enunciado, hemos prescindido de los contenidos —irrelevantes desde el punto de vista lógico— y nos hemos quedado tan sólo con unos posibles valores de verdad.

La reducción de functores

Quizá el lector espera que emprendamos ahora la tarea de enumerar y comentar una a una las tres funciones monádicas que componen, junto con la negación, las cuatro de la tabla, y asimismo las doce funciones diádicas que, sumadas a la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional, hacen las dieciséis. No vamos a hacerlo, sin embargo, porque no hay ninguna necesidad lógica de ello. Y no la hay porque todas las demás funciones son reductibles a las cinco que conocemos. Que son reductibles quiere decir que son *definibles* en términos de éstas. Son definibles mediante las llamadas «definiciones *contextuales*». Definir contextualmente un símbolo no es otra cosa que definir un contexto

en el que aparece el símbolo de que se trate en términos de otro contexto en el que el símbolo en cuestión ya no aparece. Definir contextualmente una conectiva consiste, entonces, en mostrar cómo puede sustituirse una expresión compuesta con esa conectiva por una expresión que no la contenga y que sea, desde luego, equivalente a la primera. Se trata, obviamente, de definiciones sintácticas, en las que no se hace alusión alguna al significado de los términos, sino tan sólo a sus relaciones[74].

Así, definir contextualmente la función que en nuestra tabla lleva el número 9 (y que corresponde, dicho sea de paso, a la disyunción excluyente)

p	q	pf_9q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

consistiría, por ejemplo, en decir

$$pf_9q =_{Df} \neg (p \leftrightarrow q),$$

[74] De las cuatro funciones monádicas nos hemos quedado tan sólo con la negación. Las otras tres son definibles por medio de ésta y de alguno de los functores diádicos. En efecto: la función monádica núm. 1, cuyos valores son {1, 0} se definiría así:

$$p \wedge p,$$

expresión cuya tabla verdad es

p	$p \wedge p$
1	1
0	0

mientras que la definición de la función monádica núm. 3 sería

$$p \vee \neg p,$$

como lo prueba la siguiente tabla de verdad

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Por último, la función monádica núm. 4 tendría, como definición contextual, ésta:

$$p \wedge \neg p$$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

con lo cual hemos definido un contexto, 'pf_9q', en el que aparece la conectiva que se trata de definir, en términos de otro contexto, '$\neg (p \leftrightarrow q)$', en el que la conectiva en cuestión no aparece, y que es, además, equivalente al anterior, como se puede ver comparando las tablas de verdad de ambas expresiones

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg (p \leftrightarrow q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

Asimismo, podríamos definir contextualmente la función que hace el número 6, del siguiente modo:

$$pf_6q =_{Df}. (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q).$$

Se trata, en efecto, de expresiones equivalentes:

p	q	pf_6q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Etcétera.

No es necesario, por tanto, utilizar las dieciséis funciones diádicas. Nos basta con cuatro de ellas más la negación.

Pero todavía podemos ir más lejos en nuestro afán por economizar signos. Podemos todavía reducir el número de constantes.

Todas las funciones diádicas son, en efecto, reductibles a *dos*. E incluso nos es dado elegir cuáles sean esas dos:

A) O bien la negación y la disyunción.
B) O bien la negación y la conjunción.
C) O bien la negación y el condicional[75].

[75] El lector se preguntará tal vez por qué no podemos tomar como functores primitivos la negación *y el bicondicional*.

Por la razón de que, dadas cuatro combinaciones posibles de los valores de verdad, siempre habrá como mínimo dos casos en los que los valores de verdad coincidan, y, por ende, siempre habrá dos casos en los que el bicondicional es verdadero. Nunca podríamos, por tanto, definir en términos del bicondicional la conjunción (verdadera en un solo caso) y el condicional y la disyunción (que sólo en un caso son falsos).

Los contextos en que aparezca cualquiera de las restantes funciones diádicas pueden ser definidos en términos de contextos en los que intervengan, bien tan sólo '$\neg$' y '$\vee$', bien tan sólo '$\neg$' y '$\wedge$', bien tan sólo '$\neg$' y '$\rightarrow$'.

Veamos cómo. Es evidente que, puesto que las dieciséis funciones diádicas son reductibles a las cinco que conocemos, si mostramos que estas cinco son reductibles a dos habremos mostrado que a estas dos son reductibles las dieciséis.

Hemos dicho que en el lenguaje lógico los contenidos del razonamiento se esquematizan mediante variables con un determinado campo de valores. En el caso concreto de la lógica de enunciados o de proposiciones, esas variables tendrán como campo de valores el conjunto de los enunciados[76]. Serán variables de enunciado. Una expresión como

$$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$$

es, en realidad, un esquema de infinitas expresiones: el esquema de las infinitas expresiones que podríamos obtener sustituyendo 'p' y 'q' por enunciados distintos cada vez.

Pues bien: ahora, al mostrar cómo unas conectivas pueden ser definidas en términos de otras, vamos a utilizar, no ya variables, sino *variables de variables*, metavariables. Y así como las variables 'p', 'q', 'r', 's', 't', etc. pueden ser sustituidas por proposiciones cualesquiera, así nuestras metavariables, 'X', 'Y', 'Z', etc., podrán ser sustituidas por cualesquiera expresiones compuestas de variables de enunciado. Utilizamos metavariables para hablar acerca de expresiones construidas con variables de enunciado, para *mencionar* variables de enunciado. Ellas pertenecen, por tanto, al metalenguaje. Son, pues, variables *metalógicas*, y, señaladamente, *sintácticas*, pues en las expresiones en que aparecen sólo se hace referencia a las relaciones entre secuencias de signos, y no también, por ejemplo, al significado de éstos.

Así pues, del mismo modo que una expresión como

$$p \vee q$$

esquematiza, según acabamos de ver, cualquier disyunción entre enunciados concretos, una expresión como

$$X \vee Y$$

[76] En rigor, y supuesto que de los enunciados en general sabemos que pueden y tienen que ser o bien verdaderos o bien falsos, podríamos decir que el campo de valores de esas variables está constituido por el conjunto:

1, 0

Dicho de otro modo: ese campo de valores tiene dos elementos: el valor verdad y el valor falsedad.

esquematizará cualquier esquema de disyunción obtenido sustituyendo las variables metalógicas por variables lógicas, que podrán ser sustituidas a su vez por enunciados concretos. La expresión '$X \vee Y$' puede ser sustituida, entonces, por

$$p \vee q$$

o por

$$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$$

o por

$$[p \rightarrow (q \wedge r)] \vee [q \rightarrow (p \wedge r)],$$

etcétera.

A) Negación y disyunción

Vamos a ver, entonces, utilizando variables sintácticas, cómo, en primer lugar, pueden definirse las restantes funciones diádicas en términos del functor *negación* y del functor *disyunción*. Nos bastará, como decíamos, con definir en términos de éstos la conjunción, el condicional y el bicondicional.

Pues bien: he aquí esas definiciones.

1.° $(X \wedge Y) =_{Df.} \neg(\neg X \vee \neg Y)$.

Es decir: una conjunción de enunciados cualesquiera es equivalente a la negación de la disyunción de esos enunciados negados a su vez. Una ejemplificación de esa expresión metalógica la constituiría este esquema lógico:

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$[77].

Ambas expresiones son, efectivamente, equivalentes, en el sentido de que tienen la misma tabla de verdad.

2.° $(X \rightarrow Y) =_{Df.} (\neg X \vee Y)$.

Cualquier expresión en que aparezca un condicional es equivalente a otra expresión en la que se sustituyera ese condicional por una disyunción con el primer miembro negado[78]. Así,

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\neg(p \wedge q) \vee r].$$

[77] Como veremos al final de este apartado, el bicondicional sirve para expresar, para reflejar en el lenguaje lógico la relación metalógica de equivalencia.

[78] Pensemos en ejemplos como 'Si se mueven, disparo' ('$p \rightarrow q$'), equivalente a 'No se muevan o disparo' ('$\neg p \vee q$').

3.° $(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} \neg [\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)]$.

Esta tercera definición parece exigir algún comentario, relativo al proceso mediante el cual hemos llegado a ella. Así es como hemos llegado:

Comenzamos definiendo el bicondicional como una conjunción de condicionales

$$(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X).$$

Definamos después la conjunción y el condicional en términos de negación y disyunción, cosa que ya sabemos cómo hacer. Lo haremos en dos pasos, definiendo primero los condicionales que van dentro de los paréntesis:

$$[(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] =_{Df.} [(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)].$$

Y ya sólo queda por eliminar la conjunción. Puesto que

$$(X \wedge Y) =_{Df.} \neg(\neg X \vee \neg Y),$$

$$[(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)] =_{Df.} \neg [\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)].$$

Queda claro, entonces, que podríamos prescindir de quince de las dieciséis funciones diádicas, limitándonos a definir los contextos en que aparecen en términos de otros en los que intervienen como únicas constantes la negación y la disyunción[79].

B) Negación y conjunción

Pero también podríamos definirlos en términos de contextos en los que intervienen como únicas constantes la negación y la *conjunción*. En efecto:

1.° $(X \vee Y) =_{Df.} \neg(\neg X \wedge \neg Y)$.

---

[79] Queda claro, por otra parte, que podemos también prescindir de las otras tres funciones monádicas (cfr. la nota 74), pues son también definibles en términos de negación y disyunción. En efecto: la función monádica núm. 1 quedaría definida como

$$X \vee X$$

La función monádica núm. 3 (recuérdese que la núm. 2 era la propia negación) se definiría como antes (pero ahora ya utilizando variables sintácticas):

$$X \vee \neg X$$

En cuanto a la núm. 4, quedaría definida como

$$\neg(X \vee \neg X)$$

Antes veíamos que la conjunción de dos enunciados podía definirse como la disyunción, negada, de dichos enunciados negados a su vez. Veamos ahora que una disyunción de enunciados podría definirse como la conjunción, negada, de dichos enunciados negados.

2.° $(X \rightarrow Y) =_{Df.} \neg(X \wedge \neg Y)$.

En efecto: decir que una cosa es condición de otra es tanto como decir que no es el caso que se dé la primera y no se dé la segunda. Por ello, una forma más de expresar un condicional, 'si *p*, entonces *q*', sería ésta: 'No *p*, sin *q*', 'no se da lo enunciado por *p* sin que se dé lo enunciado por *q*'.

3.° $(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} [\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(Y \wedge \neg X)]$.

En efecto:

$$(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] =_{Df.} [\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(Y \wedge \neg X)]$$

C) Negación y condicional

También podríamos tomar como functores no definidos —y definir en términos de ellos todos los demás— la negación y el condicional. Del siguiente modo:

1.° $(X \vee Y) =_{Df.} (\neg X \rightarrow Y)$[80].

2.° $(X \wedge Y) =_{Df.} \neg(X \rightarrow \neg Y)$.

3.° $(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} \neg [(X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow X)]$.

En efecto:

$$(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] =_{Df.} \neg [(X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow X)].$$

De veinte funciones hemos pasado a cinco, y de cinco hemos pasado a dos.

Pero es más: de dos podemos pasar a *una*. Y esa una pueden ser dos. Hay dos funciones diádicas, en términos de cualquiera de las cuales se pueden definir todas las demás.

---

[80] La disyunción podría incluso definirse mediante el condicional exclusivamente, sin necesidad de emplear también la negación:

$$(X \vee Y) =_{Df.} [(X \rightarrow Y) \rightarrow Y]$$

Esas dos funciones son:

1.° La función que en nuestra tabla ocupa el número 14, conocida con el nombre de 'incompatibilidad', 'negación alternativa' o 'función barra de Sheffer'[81].

Esta función se representa así:

$$p \mid q,$$

y tiene esta tabla de verdad

p	q	$p \mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

razón por la cual se la conoce también con el nombre de 'negación de la conjunción'.

2.° O bien la función número 4, 'negación conjunta', 'función flecha', o negación de la disyunción:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Veamos cómo pueden reducirse a la incompatibilidad las cinco funciones básicas:

1.° $X \vee Y =_{Df.} [(X \mid X) \mid (Y \mid Y)].$

Ambas expresiones son, en efecto, equivalentes, como se puede mostrar con un ejemplo:

$$(p \vee q) \leftrightarrow [(p \mid p) \mid (q \mid q)].$$

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$(p \mid p)$	$(q \mid q)$	$[(p \mid p) \mid (q \mid q)]$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	0

2.° $X \wedge Y =_{Df.} [(X \mid Y) \mid (X \mid Y)].$

3.° $X \rightarrow Y =_{Df.} [(X \mid X) \mid (X \mid X)] \mid (Y \mid Y).$

4.° $X \leftrightarrow Y =_{Df.} \langle\{[(X \mid X) \mid (X \mid X)] \mid (Y \mid Y)\} \mid \{[(Y \mid Y) \mid (Y \mid Y)] \mid (X \mid X)\}\rangle \mid \langle\{[(X \mid X) \mid (X \mid X)] \mid (Y \mid Y)\} \mid \{[(Y \mid Y) \mid (Y \mid Y)] \mid (X \mid X)\}\rangle$

En efecto:

$$(X \leftrightarrow Y) =_{Df.} [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] =_{Df.} \{[(X \mid X) \mid (X \mid X)] \mid (Y \mid Y)\} \wedge \{[(Y \mid Y) \mid (Y \mid Y)] \mid (X \mid X)\}.$$

De donde, en virtud de la definición de la conjunción en términos de la incompatibilidad, obtenemos la fórmula arriba desarrollada.

5.° $\neg X =_{Df.} (X \mid X).$

Así pues, incluso la negación, que parecía irreductible, puede ser definida también en términos de esta única función.

Otro tanto podríamos hacer utilizando, en lugar de la incompatibilidad, la negación conjunta o función flecha.

A nadie escapa que estas posibilidades de reducir el número de funciones tienen un interés puramente teórico. Porque en la práctica —como lo prueba, por ejemplo, la luenga definición del bicondicional en términos de la incompatibilidad—, el uso de una sola función, y aún de sólo dos, complicaría grandemente las fórmulas y haría el cálculo punto menos que inmanejable.

Sin olvidar, por tanto, la posibilidad que en teoría tenemos de prescindir de alguna o de todas ellas, seguiremos utilizando la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional.

Tautologías, contradicciones y expresiones consistentes

Hemos entrado en posesión de todos los recursos expresivos del lenguaje de la lógica de enunciados. Estamos ya, pues, en disposición

[81] 'Función barra', por el modo como acostumbra a representarse. 'De Sheffer', por el nombre de quien enunció, en 1913, la posibilidad de definir todas las demás funciones en términos de ésta.

de «hablarlo»[82]. Estamos en disposición de servirnos de él, ya sea para analizar expresiones del lenguaje natural y traducirlas al lenguaje lógico reduciéndolas a su forma, como cuando traducimos la expresión

> A no ser que se produzca un milagro, esta será la última vez que Henry Jekyll piensa con su propio cerebro y vea su imagen reflejada en el espejo (R. L. Stevenson).

de esta forma

$$[\neg p \rightarrow (q \wedge r)];$$

ya sea para componer directamente esquemas de enunciados que, provistos en cada caso de un contenido distinto, pueden dar lugar a infinitos enunciados concretos, como cuando formulamos, por ejemplo, el esquema

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)].$$

Por lo que se refiere a esta última posibilidad, es evidente que podemos construir, enlazando variables mediante conectivas, infinitos esquemas de enunciados, infinitas formas de expresiones. Así,

$$p \wedge (q \vee r)$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$$
$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$
$$(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \wedge r)$$
Etcétera.

Ahora bien: si estos esquemas —y otros con los que hubiéramos podido prolongar la serie— son, todos ellos, esquemas de enunciados, es decir, esquemas que se convertirán en determinados enunciados compuestos cada vez que sustituyamos las variables por determinados enunciados simples, no todos ellos son esquemas de inferencia.[83] Porque no en todos ellos se infieren unos enunciados a partir de otros. En efecto: en el primer esquema, por ejemplo, lo único que hacemos es enunciar la conjunción de p con la disyunción de q y r; y en el cuarto enunciamos que o bien si y sólo si p entonces q, o bien no-q y r. En ninguno de estos casos existen premisas ni conclusión.

Por el contrario, en los casos segundo y tercero estamos enunciando esquemas de inferencia: estamos diciendo —en el caso tercero, por ejemplo— que *si* es verdad que lo enunciado por p es condición de lo enunciado por q, y es también verdad que no se da lo enunciado por q, *entonces* es verdad que no se da lo enunciado por p. Aquí —como también en el caso segundo ('si y sólo si..., entonces...')— sí: aquí hay unas premisas y una conclusión que se infiere de ellas[84]. No se trata, por tanto, simplemente de esquemas de enunciados, sino, específicamente de esquemas que presentan relaciones de inferencia entre enunciados. Sustituyendo las variables por determinados enunciados simples obtendríamos un razonamiento, un enunciado compuesto en el que se expresa un razonamiento. Es este último tipo de esquema de enunciado el que sobre todo interesa a la lógica.

[82] Hablar de «*hablar* un lenguaje formalizado», es, prácticamente, una metáfora (y de ahí las comillas en el texto), a no ser que se emplee el término en su sentido amplio («hablar» un lenguaje, en el sentido general de emplearlo como sistema de comunicación) y no en sentido estricto («hablarlo», en el sentido de utilizarlo *oralmente*). Porque los lenguajes formalizados son de hecho más bien lenguajes *escritos*.

[83] Si bien es cierto que podríamos transformarlos en esquemas de inferencia sin más que definir su functor principal en términos del condicional.

Toda ciencia es un sistema de enunciados. De enunciados que se refieren, de un modo más o menos lejano, a los objetos de los que esa ciencia se ocupa. Puesto que la lógica se ocupa del razonamiento desde el punto de vista de su forma, lo que sus enunciados enunciarán serán formas de razonar. Y puesto que la lógica es la ciencia de la inferencia formalmente válida, a la lógica le ha de interesar distinguir aquellas formas de inferencia que son válidas de aquellas otras que no lo son. Y le interesará retener y enunciar con rigor las formas válidas de inferencia. Así pues, los enunciados de la lógica representarán, en general, formas de inferencia, y, señaladamente, formas válidas de inferencia.

De acuerdo con esto, tomemos, por ejemplo, los siguientes esquemas de inferencia:

$$[(p \rightarrow \varsigma) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$
$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow (p \vee r)$$
$$[(p \wedge q) \rightarrow p] \rightarrow [(q \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg r)].$$

¿Son válidos los tres? ¿Se trata de tres formas válidas de razonar? Veámoslo por medio de las tablas de verdad.

La primera expresión es un condicional. Hallemos, pues, en primer lugar, los valores de verdad de su antecedente:

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

[84] Todo razonamiento tiene —o, como veremos, puede ser reducido a— la forma de un condicional (o, naturalmente, de un bicondicional).

y después, los de su consecuente:

p	q	r	$p \to r$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Los valores de verdad de la expresión entera serán, por tanto, éstos:

$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to r)$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
1	1	1
0	0	1
0	1	1
0	0	1
1	1	1
0	1	1
1	1	1
1	1	1

En cuanto al segundo esquema de inferencia, su tabla de verdad arroja los valores siguientes:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$p \vee r$	$[(p \wedge q) \to r] \to (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0

Y éstos serán los del tercero:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$	$q \vee r$	$\neg q$	$\neg r$	$(\neg q \wedge \neg r)$	$(q \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg r)$	$[(p \wedge q) \to p] \to [(q \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg r)]$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0

Nos encontramos, pues, con tres tipos distintos de expresiones, con tres distintos tipos de esquemas de inferencia: 1.º Aquellos cuya tabla de verdad da el valor verdad en todos los casos, es decir, aquellos que son verdaderos para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de los enunciados que los componen. 2.º Aquellos otros cuya tabla de verdad da en ocasiones el valor 1 y en ocasiones el valor 0. Y 3.º Aquellas otras expresiones que son falsas en todos los casos posibles, aquellas cuya tabla de verdad da siempre como resultado el valor falsedad.

Pues bien: de los esquemas de inferencia del primer tipo se dice que son *válidos*. Se les llama a veces *tautologías*. Las tautologías son, pues, enunciados formalmente verdaderos de la lógica de proposiciones que representan otras tantas formas válidas de razonar. A los enunciados falsos en todos los casos posibles, formalmente falsos, se les llama *contradicciones*. Y los enunciados que son verdaderos en ciertos casos y falsos en otros —es decir, que no son formalmente verdaderos, pero tampoco falsos formalmente— reciben el nombre de expresiones *consistentes*.

Mediante el método de las tablas de verdad podemos, por tanto, detectar la validez de un esquema de inferencia. Para decidir si una forma de razonar es válida o no, basta con hacer su tabla de verdad. Si al cabo de ésta encontramos que todas las combinaciones posibles de los valores de verdad dan como resultado el valor verdad, entonces diremos que se trata de una forma válida de inferencia [85].

[85] Entre los varios procedimientos de decisión, señalemos por ahora, junto al de las tablas de verdad, el llamado «método de reducción al absurdo». Consiste esencialmente en lo siguiente:

Sea la siguiente expresión:

$$[(p \wedge q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$$

¿Qué quiere decir que una forma de razonar es válida? Quiere decir, recordémoslo, que, para cualquier razonamiento que podamos hacer con esa forma, si las premisas son verdaderas, entonces lo es también necesariamente la conclusión. Lo cual a su vez quiere decir que, cuando un razonamiento es formalmente válido, resulta contradictorio afirmar sus premisas y negar su conclusión. Por ejemplo: puesto que el esquema de inferencia

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

es, como antes hemos visto, válido, la conjunción de sus premisas con la negación de su conclusión

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg (p \rightarrow r),$$

Partimos del supuesto de que es falsa, de que se trata de una contradicción, y si, desarrollando las consecuencias de esta hipótesis, venimos a caer en una inconsistencia, entonces habremos de retirar la hipótesis y concluir que la expresión es verdadera, que es una tautología.

Comencemos suponiendo que la expresión es falsa, cosa que indicamos escribiendo el símbolo de la falsedad debajo de la conectiva principal:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$
0

Ahora bien: puesto que la expresión es un condicional, si es falso sólo puede serlo por una razón: porque su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. Es decir:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$
1 0 0

Pero el consecuente es, a su vez, un condicional. Si, como hemos de suponer, es falso, lo será sólo porque su antecedente es verdadero y su consecuente es falso:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$
1 0 1 0 0

Y si el consecuente del consecuente es falso es que su antecedente es verdadero y su consecuente es falso

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$
1 0 1 0 1 0 0

Conocemos ya, pues, los valores de verdad de las tres variables ($p = 1$; $q = 1$; $r = 0$), que escribiremos también en el antecedente:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$
1 1 1 0 0 1 0 1 0 0

Y ha surgido ya la inconsistencia. En efecto: partíamos del supuesto de que el antecedente, que es un condicional, era verdadero. Pero he aquí que si bien el antecedente de éste —que es una conjunción— es verdadero —pues lo son *p* y *q*, sus miembros—, su consecuente —*r*— es falso: y entonces *el condicional es falso*, en contra de nuestra hipótesis inicial. Y puesto que nuestra hipótesis inicial era que la expresión era falsa, y puesto que esta hipótesis nos ha llevado a una contradicción, podemos concluir —de acuerdo con un esquema válido de razonamiento que luego presentaremos— que la expresión no es falsa, sino verdadera. Que es una tautología que enuncia un esquema válido de inferencia. Cuando la contradicción no surge, entonces es que se trata bien de una expresión contradictoria, bien de una expresión consistente.

es una contradicción. Así ocurre en este caso, como podrá comprobar el lector por sí mismo.

Usando el lenguaje de la lógica de enunciados podemos construir un número infinito de expresiones esquemáticas. De ellas, unas serán simplemente esquemas de enunciados y otras serán, específicamente, esquemas de inferencia. Usando el lenguaje de la lógica de enunciados podemos construir infinitos esquemas de inferencia. De éstos, unos serán válidos y otros no lo serán. Usando el lenguaje de la lógica de enunciados podemos construir infinitos esquemas válidos de inferencia[86].

Los enunciados de esquemas válidos de inferencia constituirán *leyes de la lógica*. He aquí algunas de las leyes de la lógica de enunciados, seleccionadas, ya sea por la regularidad con que se dan —es decir, por la frecuencia con que los sujetos construyen razonamientos de esa forma—, ya por su importancia en el razonamiento científico o en la argumentación ordinaria.

Leyes de la lógica de enunciados

1. $\neg\neg p \rightarrow p$[87].

Se la conoce con el nombre de '*Ley de Doble Negación*'[88].

---

[86] Una propiedad específica de los conjuntos infinitos —es decir, de aquellos conjuntos con un número infinito de miembros— es que son equivalentes a alguno de sus subconjuntos *propios*. Así, por ejemplo, el conjunto de los números naturales tiene tantos miembros como el conjunto de los números pares o como el conjunto de los números impares, o como el conjunto de los números primos, o como el conjunto de los números cuadrados (siendo como es cualquiera de éstos un subconjunto de aquel):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20...
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19...
1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100...

De igual modo, el conjunto de las infinitas expresiones construibles en el lenguaje de la lógica de enunciados tiene un subconjunto, también infinito, que es el de las expresiones que enuncian esquemas de inferencia, y éste a su vez tiene un subconjunto infinito que es el de las expresiones que enuncian esquemas válidos de inferencia.

[87a] En lógica de clases:

$$--A = A \quad \text{o bien} \quad --A \subset A$$

[88] No hay duda de que se trata de un esquema válido: puesto que estamos operando con sólo dos valores de verdad, y puesto que la aplicación de la función negación a un enunciado hace que se invierta el valor de verdad de éste, una nueva aplicación de la función hará que el valor de verdad se invierta nuevamente y vuelva a ser el mismo que antes de la doble aplicación.

En general, por tanto:

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$
$$\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p$$
$$\neg\neg\neg\neg p \leftrightarrow p$$
$$\neg\neg\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p$$

Etcétera

2. $(p \wedge q) \rightarrow p$[89*].

3. $p \rightarrow (p \vee q)$[90*],

A 2 y a 3 se les llama '*Leyes de simplificación*'[91].

4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$[92*].

Ley de contraposición (del condicional)[93].

5. $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$[94*].

Ley de conmutatividad de la conjunción.

6. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$[95*].

Ley de conmutatividad de la disyunción.

7. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$[96*].

Ley de conmutatividad del bicondicional[97].

89* En lógica de clases

$$(A \cap B) \subset A$$

Supongamos, por ejemplo, que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.
Tenemos, entonces: $A \cap B = 4, 5$.
Y es evidente que $(A \cap B) \subset A$, puesto que $\{4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

90* $A \subset (A \cup B)$.

91 Conociendo las condiciones de verdad de los enunciados conjuntivos y de los enunciados disyuntivos, la validez de estos dos esquemas resulta obvia. En el caso de la ley 2, si la premisa, '$p \wedge q$', es verdadera, lo será también la conclusión, 'p', puesto que, siendo la premisa una conjunción, sólo será verdadera si lo son sus dos miembros, uno de los cuales constituye la conclusión. De igual modo, en el caso de la ley 3, y puesto que para que una disyunción sea verdadera basta con que lo sea uno de sus miembros, si la premisa, 'p', es verdadera, entonces lo será la conclusión formada por la disyunción de 'p' con cualquier otro enunciado, sea cual fuere el valor de verdad de este último.
Es claro, por lo demás, que también serían válidos estos otros esquemas

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$
$$q \rightarrow (p \vee q)$$

92* $(A \subset B) \rightarrow (-B \subset -A)$.

93 Hay también, por otra parte, una *Ley de contraposición del bicondicional:*

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p) \quad [\text{En lógica de clases: } (A = B) \rightarrow (-B = -A)]$$

94* $(A \cap B) \subset (B \cap A)$; o bien $(A \cap B) = (B \cap A)$. Es decir: $(A \cap B) \subseteq (B \cap A)$.

95* $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.

96* $(A = B) \rightarrow (B = A)$.

97 Ni que decir tiene que el condicional no posee la propiedad conmutativa. Por definición no la posee. En efecto: al decir 'si p, entonces q', estamos introduciendo un orden en la relación entre estos dos enunciados, estamos dando prioridad —prioridad lógica— a p sobre q.

8. $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$[98*].

Ley de asociatividad de la conjunción.

9. $[(p \vee q) \vee r] \rightarrow [p \vee (q \vee r)]$[99*].

Ley de asociatividad de la disyunción.

10. $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \rightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$[100*].

Ley de asociatividad del bicondicional[101].

11. $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$[102*].

Ley de distributividad de la conjunción por la disyunción.

12. $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$[103*].

Ley de distributividad de la disyunción por la conjunción.

13. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$[104*].

Ley de distributividad del condicional por la conjunción.

14. $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$[105*].

Ley de distributividad del condicional por la disyunción.

15. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow r)]$[106*].

Ley de transitividad del condicional.

16. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow [(p \leftrightarrow r)]$[107*].

Ley de transitividad del bicondiconal.

98* $[(A \cap B) \cap C] \subseteq [A \cap (B \cap C)]$.

99* $[(A \cup B) \cup C] \subseteq [A \cup (B \cup C)]$.

100* $[(A = B) = C] \rightarrow [A = (B = C)]$.

101 El condicional no posee, tampoco, la propiedad asociativa. Si la poseyera, su formulación sería ésta:

$$[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

Y esta expresión, como puede comprobar el lector mediante alguno de los métodos conocidos, no es una tautología. No es, por tanto, una ley.

102* $[A \cap (B \cup C)] \subseteq [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.

103* $[A \cup (B \cap C)] \subseteq [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$.

104* $[A \subset (B \cap C)] \rightarrow [(A \subset B) \wedge (A \subset C)]$.

105* $[A \subset (B \cup C)] \rightarrow (A \subset B) \vee (A \subset C)]$.

106* $[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \rightarrow (A \subset C)$.

107* $[(A = B) \wedge (B = C)] \rightarrow [(A = C)]$.

17. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$.

Ley de exportación[108].

18. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$.

Ley del dilema constructivo[109].

19. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$.

Segunda ley del dilema constructivo.

20. $[(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)] \rightarrow (\neg r \vee \neg s)$.

Ley del dilema destructivo.

21. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$[110].

Ley de Clavius.

---

108 A la ley inversa a ésta

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

se la conoce con el nombre de *Ley de importación.*

109 En su *Protréptico* dice Aristóteles:

> «O debemos filosofar o no debemos hacerlo. Si debemos hacerlo, entonces debemos hacerlo. Si no debemos hacerlo, entonces también debemos hacerlo [para explicar por qué no debemos hacerlo]. Luego en cualquier caso debemos filosofar.»

Esta argumentación tiene estructura de dilema. Su forma, en efecto, es ésta:

$$[(p \vee \neg p) \wedge (p \rightarrow p) \wedge (\neg p \rightarrow p)] \rightarrow p$$

En el *Dépêche de Toulouse* (4-X-1937) aparece citada esta frase de un miliciano de Asturias:

> Qué importa morir si no pasan, y, si pasan, qué importa morir.

En símbolos:

$$(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$$

Conclusión: 'q', es decir, 'qué importa morir'.

Puesto que no hay más que dos alternativas (que Aristóteles formula explícitamente, y el miliciano no), a saber, que se dé lo enunciado por p o que se dé lo enunciado por no-p, y puesto que ambas conducen a un mismo resultado, forzoso es afirmar este resultado como verdadero.

110 Lo que este esquema —llamado a veces *consequentia mirabilis*— viene a decir es lo siguiente: Cuando hasta la negación de lo enunciado por una proposición es condición de lo enunciado por ésta, podemos concluir que lo enunciado por ésta es verdadero. Cuando —como decía Aristóteles en el texto que hemos citado en la nota anterior— hasta para dejar de hacer filosofía es necesario hacer filosofía, es que hay que hacer filosofía en todo caso.

Se le llama 'Ley de Clavius' por el nombre del jesuita polaco que en el siglo XVI presumió de haberla enunciado por vez primera.

22. $\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$[111*].

Ley de De Morgan[112].

23. $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$[113*].

Segunda ley de De Morgan.

24. $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$.

Ley de inferencia de la alternativa[114].

25. $[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$.

Segunda ley de inferencia de la alternativa[115].

26. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$.

Modus ponendo ponens[116].

111* $-(A \cap B) \subseteq (-A \cup -B)$.

112 A esta ley y a la siguiente se les llama 'Leyes de De Morgan' por Augustus de Morgan, que, si bien no fue el primero en formularlas (pues hubo quien lo hizo ya en la Edad Media), sí fue quien las redescubrió en el siglo XIX para la lógica contemporánea.

113* $-(A \cup B) \subseteq (-A \cap -B)$.

114 A esta ley, y a la que la sigue en nuestra enumeración, se les ha venido llamando «silogismos disyuntivos». Este modo de hablar no es, sin embargo, más que una concesión a la tradición .Estos esquemas de inferencia *no son* silogismos, y nos parece que éstas e una buena razón para no darles ese nombre.

115 El lector, llevado por consideraciones de simetría, podría sentirse inducido a pensar que también son válidos estos dos esquemas:

$$[(p \vee q) \wedge p] \rightarrow \neg q$$

$$[(p \vee q) \wedge q] \rightarrow \neg p$$

Un instante de reflexión bastará, sin embargo, para que se percate de que no es así. La disyunción que constituye la primera premisa *no es* excluyente. Si es verdadera es porque lo es al menos uno de sus miembros o porque lo son los dos. Por tanto, de la falsedad dé uno cualquiera de ellos puede deducirse la verdad del otro (de otro modo, es decir, si ambos fueran falsos, la disyunción sería falsa, siendo así que estamos operando sobre la base de que las premisas son verdaderas). Pero de la verdad de uno de ellos no puede concluirse la falsedad del otro.

116 A esta ley se la conoce con el nombre que le dieron los lógicos medievales. '*Modus ponendo ponens*' quiere decir: aquel modo de razonar, aquella forma de inferencia que, afirmando que se da una relación condicional ('$p \rightarrow q$') y afirmando *(ponendo)* que se da lo enunciado por el antecedente, deduce y afirma *(ponens)* como verdadero lo enunciado por el consecuente.

Está clara la razón por la que el esquema es válido: no hace más que desarrollar el sentido del condicional.

27. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$.

Modus tollendo tollens[117].

Etcétera.

---

[117] A esta ley se la conoce con el nombre que le dieron los lógicos medievales. '*Modus tollendo tollens*' quiere decir: aquel modo de razonar, aquella forma de inferencia que, afirmando que se da una relación condicional, y negando *(tollendo)* que se dé lo enunciado por el consecuente, deduce como falso y niega *(tollens)* lo enunciado por el antecedente.

También aquí, como en el caso anterior, está clara la razón por la que el esquema es válido.

* * *

Parece existir una fuerte tendencia a creer que, puesto que son válidos los dos esquemas anteriores, han de serlo también estos otros dos:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$$

y

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

No lo son, sin embargo, y para entender el por qué basta con pararse a pensar en cuál es el sentido lógico estricto de la función llamada 'condicional'. Con la expresión 'si p, entonces q' queremos decir que p es condición suficiente de q, pero no condición necesaria (es decir, no necesariamente la única condición). Por tanto, ni del hecho de que no se haya producido lo enunciado por p podemos concluir *formalmente* que es falso que se haya producido lo enunciado por q, ni del hecho de que se haya producido lo enunciado por q podemos concluir *formalmente* que se haya producido lo enunciado por p. (En este sentido sí serán válidos, en cambio, los esquemas '$[(p \leftrightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$' y '$[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$'.)

* * *

En relación con el *modus tollendo tollens* parece oportuno hablar, siquiera sea brevísimamente, de los llamados «métodos de reducción al absurdo». Reducir una hipótesis al absurdo consiste en mostrar que de ella se derivan consecuencias que son inaceptables y que, por tanto, deben ser negadas: si conseguimos mostrarlo, habremos mostrado por ende la necesidad de retirar la hipótesis de la que partíamos y que nos ha conducido a ellas. El *modus tollendo tollens* es un ejemplo claro de este tipo de argumentación: Si es verdad que p, entonces es verdad que q. Ahora bien: no es verdad que q. Luego no es verdad que p.

Otro modo de argumentación de este mismo tipo sería la siguiente:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p$$

que podría parafrasearse simplemente diciendo: puesto que la hipótesis p nos conduce a consecuencias contradictorias $[(p \rightarrow (q \wedge \neg q)]$, hemos de negarla.

Otro esquema de inferencia que responde a la misma idea sería

$$[(p \rightarrow \neg p)] \rightarrow \neg p,$$

al que podríamos llamar '*Contra-ley de Clavius*'. En efecto: lo que muestra esta ley es que cuando un enunciado conlleva (es condición de) su propia falsedad, entonces es que el enunciado es falso.

Podríamos seguir enumerando leyes. Podríamos escribir infinitos libros en los que nos limitáramos a enumerar infinitas leyes[118]. Pero esperamos que baste con estas veintisiete para que todo, a este respecto, quede claro.

Condicional e implicación. Bicondicional y equivalencia

Parece llegado el momento de hacer algunas observaciones en torno al problema de las relaciones entre *condiconal* e *implicación*, por una parte, y, por otra parte, entre *bicondiconal* y *equivalencia*.

No es infrecuente —y es especialmente frecuente en la bibliografía francesa— la confusión de la implicación con el condicional. Se llega, entonces, a decir que una expresión como '$p \rightarrow q$' se puede leer, indiferentemente, 'si p, entonces q', o bien, 'p implica q'.

Es falso que esto sea así: 'si p, entonces q' y 'p implica q' significan cosas distintas. Cuando decimos 'si p, entonces q' estamos *usando* el lenguaje —el lenguaje de la lógica de enunciados— para expresar que lo enunciado por p es condición suficiente de lo enunciado por q, es decir, para expresar una relación entre enunciados. En cambio, cuando decimos 'p implica q' estamos usando el *metalenguaje* del cálculo de enunciados para expresar una relación *no entre enunciados, sino entre nombres de enunciados*, y en este sentido lo correcto estrictamente sería decir "'p' implica 'q'". Cuando decimos 'si p, entonces q', estamos diciendo que si se da el hecho enunciado por el antecedente, entonces se dará el hecho enunciado por el consecuente. Cuando decimos "'p' implica 'q'" estamos diciendo que la verdad del antecedente implica la verdad del consecuente. Y de sobra sabemos que 'verdad' y 'falsedad' son predicados metalingüísticos por respecto a aquello de lo que se predican.

Condicional e implicación son, por tanto, nociones situadas en niveles distintos de lenguaje.

Hay, sin embargo, entre uno y otro concepto, una relación que merece la pena señalar. Condicional e implicación se relacionan del siguiente modo: *cuando un condiconal es lógicamente verdadero, se puede decir que su antecedente implica su consecuente*[119]. Pero esto sólo cuando

---

[118] Por ejemplo:

$(p \wedge p) \rightarrow p$
$(p \vee p) \rightarrow p$
$[(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow (\neg q \leftrightarrow p)$
$[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)] \rightarrow r$
Etcétera.

[119] Es decir, que, cuando un esquema de razonamiento es válido, dado un razonamiento concreto cualquiera construido de esa forma, se puede decir que el antecedente implica el consecuente.

el condicional sea lógicamente verdadero; y además, no se trata de que ambas expresiones —'si *p*, entonces *q*' (siendo esta expresión lógicamente verdadera) y "*p*' implica '*q*" (o, más claramente, 'el enunciado '*p*' implica el enunciado '*q*")— vengan a decir lo mismo, sino que la segunda constituye una paráfrasis metalógica de la primera, un comentario *sobre* la primera hecho desde el metalenguaje.

Así pues, y puesto que, por ejemplo,

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

es un esquema válido de inferencia, podemos decir que '$p \wedge q$' implica '*p*'. En cambio, dado un condicional como

$$(p \vee q) \rightarrow r,$$

que no es una tautología, no podemos decir —no podemos decir con verdad— que el antecedente implique el consecuente.

Decir, por tanto,

> el enunciado 'no está el mañana ni el ayer escrito (A. Machado) implica el enunciado 'no está el mañana escrito'[120]

equivale a decir

> la expresión 'si no está el mañana ni el ayer escrito, entonces no está el mañana escrito' es lógicamente verdadera[121]

En ambos casos estamos usando un metalenguaje[122]. No estamos, en cambio, usando un metalenguaje cuando decimos

> Si no está el mañana ni el ayer escrito, entonces no está el mañana escrito.

Otro tanto cabe decir respecto de la relación entre *bicondicional* y *equivalencia*. Es falso que 'si y sólo si *p*, entonces *q*' signifique lo

---

Repárese, sin embargo, en que este último enunciado, 'El antecedente implica el consecuente', pertenece al metalenguaje del lenguaje de la lógica de enunciados. El término 'el antecedente' no se refiere a ningún enunciado, sino al *nombre* de cualquier enunciado que ocupe ese puesto en una expresión construida con un condicional. Por supuesto que otro tanto cabe decir del término 'el consecuente'.

[120] Es decir: '$\neg p \wedge \neg q$' implica '$\neg p$'.

[121] O, lo que es lo mismo: el condicional así formado está construido de acuerdo con un esquema formalmente válido.

[122] Estamos mencionando enunciados para decir que existe una relación —la relación de implicación— entre sus nombres.

mismo que '*p* es equivalente a *q*'. Cuando decimos 'si y sólo si *p*, entonces *q*', estamos *usando* el lenguaje para decir que lo enunciado por *p* es condición suficiente y necesaria de lo enunciado por *q*. Cuando decimos '*p* es equivalente a *q*' estamos utilizando el *metalenguaje* para expresar una relación entre nombres de enunciados —reducidos a sus valores de verdad—, y no entre los enunciados mismos. En este sentido, lo correcto estrictamente sería decir "*p*' es equivalente a '*q*". Cuando decimos 'si y sólo si *p*, entonces *q*', estamos diciendo que sólo en el caso de que se dé lo enunciado por el antecedente se dará lo enunciado por el consecuente. Cuando decimos "*p*' es equivalente a '*q*" estamos diciendo que los valores de verdad del antecedente son en todos los casos los mismos que los del consecuente.

Bicondicional y equivalencia son, por tanto, nociones situadas en niveles distintos de lenguaje. Hay, sin embargo, entre uno y otro concepto, una relación que merece la pena señalar. Bicondicional y equivalencia se relacionan del siguiente modo: *cuando un bicondiconal es lógicamente verdadero, se puede decir que su antecedente equivale a su consecuente*[123]. Pero esto sólo cuando el bicondicional sea lógicamente verdadero; y además, no se trata de que ambas expresiones 'si y sólo si *p*, entonces *q*' (siendo esta expresión lógicamente verdadera) y "*p*' es equivalente a '*q*" —vengan a decir lo mismo, sino que la segunda constituye una paráfrasis metalógica de la primera, un comentario *sobre* la primera hecho desde el metalenguaje. Contemplando el hecho de que un bicondicional es lógicamente verdadero, se nos puede antojar describirlo metalingüísticamente diciendo que las dos expresiones que flanquean el símbolo del bicondicional son equivalentes.

Así pues, y puesto que, por ejemplo,

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

es un esquema válido de inferencia, podemos decir que '$p \rightarrow q$' es equivalente a '$\neg p \vee q$'. En cambio, dado un bicondicional como

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee q),$$

que no es una tautología, no podemos decir con verdad que el antecedente de la expresión equivalga a su consecuente; no podemos decir que sean los

---

[123] En efecto: puesto que en lógica sólo se toman en cuenta los valores de verdad de los enunciados (y no también el contenido que expresan), de tal manera que, para el caso, es como si la variable *p*, por ejemplo, designara uno de los dos valores, V o F, y puesto que un bicondicional sólo es verdadero cuando los valores de verdad del antecedente son idénticos a los valores de verdad del consecuente, si encontramos que un bicondicional es lógicamente verdadero podemos comentarlo en el metalenguaje diciendo que su antecedente equivale a su consecuente.

mismo los valores de verdad de uno y otro[124]. Más adelante[125] veremos, en acción, la neceisidad de estas distinciones que acabamos de hacer en el plano teórico.

2. La lógica de enunciados como sistema axiomático

Simbolización y formalización

No nos hemos recatado de decir en varias ocasiones que la lógica se presenta en forma de cálculo, que la lógica es la presentación formalizada de los principios del análisis del razonamiento desde el punto de vista de su estructura.

Pero si bien es cierto que lo hemos dicho, lo cierto es que no lo hemos mostrado. Porque a lo que hasta ahora hemos hecho no se le puede dar el nombre de 'formalización'. No hemos presentado en forma de cálculo la lógica de proposiciones: nos hemos limitado a representar por medio de símbolos las nociones pertenecientes a ese apartado, el más elemental, de la lógica. Y formalizar un lenguaje es mucho más que simbolizarlo. Simbolizar un lenguaje —en este caso concreto, la parte del lenguaje natural que se usa para formular inferencias de enunciados sin analizar a partir de otros enunciados que tampoco se analizan— consiste simplemente en sustituir cada signo —cada signo relevante— de ese lenguaje por un símbolo. Podemos simbolizar la partícula —o, más bien, las partículas— que en el lenguaje ordinario sirven para expresar una relación condiconal entre enunciados por '$\rightarrow$'. Podemos simbolizar las conjunciones copulativas por '$\wedge$'. Podemos —para tomar un ejemplo traído de otro campo— simbolizar los doce nombres de los

---

[124] El bicondicional plantea problemas importantes.

Por ejemplo, hemos visto que el bicondicional posee, a diferencia del condicional, la propiedad conmutativa (y así lo expresa la ley que en nuestra lista lleva el número 7).

Ahora bien: la razón que aducíamos para explicar que el condicional no posee la propiedad conmutativa era ésta: la relación condicional no es conmutativa porque lo que expresa es justamente que lo enunciado por una proposición es condición de —*antecede*, desde un punto de vista lógico, a— lo enunciado por otra proposición. Y siendo esta relación una relación ordenada (es decir, en términos técnicos, una relación que, entre otras propiedades, tiene la de ser asimétrica), es obvio que de la afirmación de que se da esa relación no cabe inferir que se dé la relación conversa.

Pero entonces, si lo que afirmamos mediante un bicondicional es que lo enunciado por una proposición es, no ya condición de lo enunciado por otra, sino *la única* condición de lo enunciado por esa otra (es decir, si el bicondicional es, como parece, un condicional reforzado), cabría esperar que, con mayor razón, careciera el bicondicional de la propiedad conmutativa. La posee, sin embargo. Y la posee por la sencilla razón —ya aducida repetidamente— de que en lógica operamos únicamente a base de los valores de verdad de los enunciados. Si aceptamos esta limitación entonces todo está en orden. El problema está en si debemos aceptarla.

[125] Cfr. el apartado 3 de este mismo capítulo.

miembros del conjunto de los profetas menores sustituyendo cada uno de los nombres por un símbolo distinto, con lo cual, en lugar del conjunto

{Oseas, Joel, Amós, Abdías, Jonás, Miqueas, Nahum, Habacuc, Sofonías, Ageo, Zacarías, Malaquías},

tendríamos, por ejemplo, este otro:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\},$$

donde '*a*' simboliza 'Oseas', '*b*', 'Joel', etc.

Naturalmente, esta simbolización que nosotros acabamos de llevar a cabo sirve para bien poco. Sirve, a lo sumo, como ejemplo. Hay casos, sin embargo, en los que de la simbolización se derivan notables ventajas, como puede ser la evitación de la sinonimia y la homonimia. Sabido es, en efecto, que en los lenguajes naturales se dan a menudo casos en que términos diversos sirven para designar un mismo objeto —y en ese caso decimos que los términos son sinónimos—, así como casos en los que un mismo término designa varios objetos diferentes —fenómeno al que denominamos 'homonimia'. En este sentido, y puesto que, por ejemplo, no todas las veces en que empleamos la partícula 'si' lo hacemos para indicar la existencia de una relación condicional, ni tampoco echamos mano de esa partícula siempre que queremos expresar la existencia de esa relación (sino que muchas veces lo hacemos mediante expresiones como 'cuando', 'con tal que', etc.), la simbolización de la relación condicional —de todas y sólo las relaciones condicionales— mediante el trazo de una flecha que apunta a lo condicionado evita ambigüedades y favorece la precisión. La simbolización, entonces, es útil a veces para eliminar algunas fuentes lingüísticas de confusión, en la medida en que gracias a ella podríamos conseguir que el conjunto de los nombres y el conjunto de los objetos nombrados fueran equivalentes, de tal modo que a cada objeto correspondiera uno y un solo nombre, y viceversa.

Conseguir esto, sin embargo, no es conseguir mucho: tan sólo una mejora en el vocabulario. Y sabemos que, mucho más importante que el vocabulario es, desde el punto de vista lógico, la sintaxis. Formalizar un lenguaje no consiste tan sólo en dotarlo de un vocabulario artificial, sino también, y sobre todo, en reconstruir su sintaxis: en hacer que las reglas de sus sintaxis, en lugar de implícitas y vagas, como las de los lenguajes naturales, sean explícitas y precisas. Un lenguaje está formalizado cuando su sintaxis no tiene secretos.

Y parece llegado el momento de formalizar la lógica de enunciados, de presentar el lenguaje de la lógica proposicional en forma de cálculo, de especificar las reglas que nos permiten construir y demostrar enunciados esquemáticos que expresan otras tantas formas válidas de inferencia.

Tres son —ya lo hemos dicho— los elementos básicos de un

cálculo: 1.° Los símbolos primitivos. 2.° Las reglas de formación. 3.° Las reglas de transformación. Algo de eso hemos visto en el apartado anterior. Allí hemos conocido, por ejemplo, los símbolos primitivos del cálculo de enunciados: variables proposicionales, y conectivas o functores de enunciado. También hemos dado a entender —aunque sólo eso— las reglas —reglas de formación— que permiten combinar esos símbolos para construir expresiones bien formadas. Pero si bien hemos hecho referencia a cierto tipo de expresiones formalmente verdaderas —expresiones de esquemas válidos de inferencia—, e incluso hemos enumerado algunas, sin embargo, nos hemos limitado a *mostrar* —mediante el método de las tablas de verdad, por ejemplo— que efectivamente se trataba de expresiones verdaderas, sin llegar a *demostrarlo*: en otras palabras, no hemos ni siquiera aludido a las reglas de transformación—. En efecto: demostrar —es decir, demostrar como verdadero— un enunciado consiste en hacer ver que se sigue válidamente de otros enunciados verdaderos, en presentar ese enunciado como el resultado de una transformación válida —es decir, conforme a las reglas— de otros enunciados ya demostrados o que, como veremos, no se demuestran.

La forma clásica de la formalización —pero no la única, ni tampoco a veces la preferible, como veremos en el siguiente apartado— es la forma axiomática. Los lenguajes formalizados toman a menudo —y hasta hace poco habían tomado prácticamente siempre— la forma de *sistemas axiomáticos.*

Presentaremos a continuación la lógica de enunciados en forma de sistema axiomático. ¿En qué consiste la axiomatización de una teoría (en este caso, la teoría de la validez formal de los razonamientos que permiten deducir unos enunciados a partir de otros sin necesidad de realizar un análisis interno de éstos)?

Una teoría es un conjunto de enunciados verdaderos —o que por tales se tienen— relativos (y la relación es en algunos casos muy compleja) a un determinado campo de problemas. Axiomatizar una teoría no es, entonces, otra cosa que organizar ese conjunto de enunciados de tal forma que, partiendo de algunos de sus miembros —los llamados «axiomas»—, y mediante la aplicación de una serie de reglas de transformación, se puedan derivar los *restantes* enunciados de la teoría —a los que llamaremos «teoremas»—. Axiomas y teoremas son expresiones del cálculo, fórmulas redactadas en el lenguaje del cálculo. Las reglas de transformación, no: en cuanto reglas para inferir unas expresiones de otras, han de hacer mención de esas expresiones, y sabemos que sólo en un metalenguaje se pueden mencionar los signos de un lenguaje. Pertenecen, pues, esas reglas al metalenguaje del cálculo.

Por tanto, demostrar un enunciado en un sistema axiomático —demostrar, con otras palabras, que el enunciado en cuestión es un teorema del sistema— consiste en derivarlo válidamente —es decir, utilizando en la derivación sólo, y de manera correcta, los recursos explícitamente

admitidos a tal efecto dentro del cálculo— a partir de los axiomas[126], en fundamentar su verdad en la de otros enunciados cuya verdad consta. Mediante métodos como el de las tablas de verdad sólo llegábamos a saber que unos determinados enunciados eran verdaderos. Mediante su demostración en un sistema axiomático podemos alcanzar a averiguar cómo y por qué lo son: hemos de ver que las tautologías derivadas como teoremas no son otra cosa que transformaciones válidamente efectuadas de las tautologías elegidas como axiomas.

Pasemos, entonces, a presentar un sistema axiomático para la lógica de enunciados. Se trata del sistema que A. N. Whitehead y B. Russell dieron a conocer en sus *Principia Mathematica* (1910-13), el llamado —y así lo llamaremos también nosotros de ahora en adelante, para abreviar— «Sistema PM» de la lógica de enunciados[127].

El sistema PM

A) Símbolos primitivos:

1. Variables proposicionales: $p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$.
2. Conectivas o functores de enunciado: $\neg$, $\vee$[128].
3. Signos de puntuación: paréntesis diversos, como '(,)', '[,]', '{, }'[129].

B) Símbolos definidos[130].

$$(\wedge)\, X \wedge Y =_{Df.} \neg(\neg X \vee \neg Y)$$
$$(\rightarrow)\, X \rightarrow Y =_{Df.} \neg X \vee Y$$
$$(\leftrightarrow)\, X \leftrightarrow Y =_{Df.} \neg[\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)].$$

[126] O, como veremos, a partir de otros teoremas ya demostrados.

[127] En lo que sigue —y casi huelga el decirlo— nos limitaremos a exponer, con variaciones sólo de detalle, lo expuesto por Whitehead y Russell en su obra, o por otros autores que a su vez han introducido variaciones de detalle en la presentación de aquellos. Es de señalar la utilidad que para nosotros ha tenido una obra como la de G. E. Hughes y D. G. Londey, *The Elements of Formal Logic* (London, Methuen, 1965), donde se ofrece una presentación modernizada del sistema PM.

[128] Recuerde el lector lo que en el apartado anterior se indicó acerca de la reducción de funciones. En uso de la libertad que esa posibilidad de reducción ofrece, Whitehead y Russell eligieron como funciones primitivas, no definidas, la negación y la disyunción.

[129] No alcanzamos a comprender cómo es que hay autores que, en lugar de los paréntesis, emplean, como signos de puntuación, puntos, de tal forma que una expresión como

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

se transforma en

$$p \cdot \rightarrow \cdot q \rightarrow r : \rightarrow : p \wedge q \cdot \rightarrow \cdot r,$$

expresión cuya estructura se deja aprehender —nos parece— con mucha menos facilidad.

[130] Ya hemos dicho que aunque en principio podríamos operar con sólo dos funciones de verdad (o incluso, como hemos visto, con sólo una), en la práctica es mucho más

C) Reglas de formación:

FR1. Una variable proposicional sola es una expresión bien formada del cálculo (como abreviatura de 'expresión bien formada del cálculo' utilizaremos 'ebf').

RF2. Si X es una ebf., entonces $\neg X$ también lo es.

RF3. Si X e Y son ebfs., entonces $X \vee Y$ también lo es[131].

RF4. Estas son todas las Reglas de Formación del cálculo[132].

D) Axiomas:

$A_1 (p \vee p) \rightarrow p$

$A_2 q \rightarrow (p \vee q)$

$A_3 (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

$A_4 [p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$

$A_5 (q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

E) Reglas de transformación:

RT1. Dada una tesis[133] del cálculo, en la que aparecen variables de enunciado, el resultado de sustituir una, algunas o todas esas variables por fórmulas bien formadas del cálculo será también una tesis del cálculo. Y ello con una única restricción, si bien importante: cada variable ha de ser

---

cómodo utilizar las cinco principales que conocemos. Y así, por ejemplo, como en seguida se verá, a la hora de formular los axiomas hemos utilizado, además de la disyunción, el condicional. Es evidente que, al no tratarse de un símbolo primitivo, hubiéramos podido prescindir de él. Hacerlo, sin embargo, hubiera hecho de los axiomas expresiones en exceso prolijas.

131 A efectos del manejo del cálculo, y a la vista de lo expresado en la nota 130, hemos de tener presente que esta tercera Regla de Formación, en unión de la segunda, lleva implícitas tres —podríamos decir— «sub-reglas» que —en aras del ideal (puramente estético) de «economía» del cálculo, es decir, en aras del ahorro de símbolos primitivos— no se hacen explícitas. Serían éstas:

RF3'.—Si X e Y son ebfs., $X \wedge Y$ lo es.
RF3''.—Si X e Y son ebfs., $X \rightarrow Y$ lo es.
RF3'''.—Si X e Y son ebfs., $X \leftrightarrow Y$ lo es.

132 Esta última Regla se introduce únicamente para dejar bien sentado que todas las Reglas de Formación están explícitas, o, dicho de otro modo, que no hay más Reglas de Formación que las que se acaban de explicitar. Por lo demás, observará el lector que, perteneciendo las Reglas de Formación al metalenguaje del cálculo —como lo muestra el uso, en su formulación, de variables sintácticas—, esta última regla está escrita en un nivel *meta*-metalingüístico con respecto al cálculo.

133 Con el término 'tesis' designamos cualquier fórmula verdadera del cálculo, sea un axioma o un teorema.

sustituida siempre que aparece, y siempre por el mismo sustituto[134].

Dicho de modo más riguroso: si X es una tesis del sistema en la que aparecen distintas variables $p_1, p_2, ..., p_n$, e $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ son expresiones bien formadas del cálculo, la expresión resultante de sustituir en X p_1 por Y_1, p_2 por Y_2, ..., p_n por Y_n será asimismo una tesis del sistema.

Se le llama a esta regla 'Regla de Sustitución'.

RT2. Si 'X' es una tesis del sistema, y lo es también la expresión '$X \rightarrow Y$', entonces 'Y' es una tesis del sistema.

Es fácil ver que esta regla —a la que se da el nombre de 'Regla de Separación'[135]— no es otra cosa que una traducción metalingüística de la ley lógica que hemos llamado '*modus ponendo ponens*': $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$[136].

---

134 Así, esta regla permite pasar, por ejemplo, de una expresión como

$$p \rightarrow (q \rightarrow p),$$

que es una tesis del cálculo, a una expresión como

$$r \rightarrow (s \rightarrow r),$$

obtenida a partir de aquélla mediante la aplicación de esta regla que estamos ilustrando: lo único que hemos hecho, en efecto, es sustituir las variables p y q por r y s respectivamente (y recordemos que, según la primera de las Reglas de Formación, 'r' y 's' son expresiones bien formadas del cálculo). Esta sustitución la indicaríamos —suponiendo que nos encontráramos en la línea n de una demostración y hubiéramos de pasar a la línea $n + 1$ mediante el empleo de esta regla— así:

$n.$— $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
$n + 1.$— $r \rightarrow (s \rightarrow r)$ RS $(p/r, q/s), n$

La expresión al margen indica, por este orden, qué reglas hemos empleado, qué sustituciones, en concreto, hemos hecho, y a qué línea hemos aplicado la transformación.

De igual modo, la Regla de Sustitución autorizaría un paso como éste

$n.$— $p \rightarrow p$
$n + 1.$— $(r \vee s) \rightarrow (r \vee s)$ RS $[p/(r \vee s)], n$

No autorizaría, sin embargo, un paso de este otro tipo

$n.$— $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
$n + 1.$— $[(s \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ RS $(p/s), n$

Y no lo autorizaría porque la sustitución —de p por s— no se ha efectuado en todos los lugares en los que aparece la variable p.

135 Por razón de la coincidencia de iniciales con la regla anterior (RS), designaremos esta otra regla mediante las iniciales de su nombre en lengua inglesa: RD, iniciales de 'Rule of Detachment'.

136 Una regla como ésta autorizaría, por ejemplo, el siguiente paso deductivo:

$n.$— $p \vee \neg q$
$n + 1.$— $(p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$
$n + 2.$— $r \wedge s$ RD, $n, n + 1$

Deducción de teoremas

Partiendo de esta base es posible —porque, según veremos más adelante, el cálculo que estamos presentando es *completo*— demostrar como teoremas todas las expresiones formalmente verdaderas construibles en el lenguaje del cálculo. Puesto que esas expresiones son infinitas en número, es obvio que no podemos demostrarlas todas, una a una. Nos limitaremos a mostrar, mediante unos cuantos ejemplos, la posibilidad de hacerlo.

Comencemos con algunas demostraciones fáciles'

¿Es un teorema la expresión '$p \rightarrow (p \vee p)$'?
Lo es. He aquí su demostración:

1.	$q \rightarrow (p \vee q)$	A2
2.	$p \rightarrow (p \vee p)$	RS (q/p), 1

La expresión '$p \rightarrow (p \vee p)$' se obtiene a partir del Axioma 2 mediante una aplicación —correcta— de la Regla de Sustitución. Es, pues, un teorema. Le llamaremos —ya que es el primero que hemos obtenido, y por esta sola razón— Teorema 1 (T1).

¿Es un teorema la expresión '$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$'?
Juzgue el lector:

1.	$[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$	A4
2.	$[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \rightarrow [\neg q \vee (\neg p \vee r)]$	RS$(p/\neg p, q/\neg q)$, 1
3.	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$	Df. $\rightarrow$, 2[137]

O este otro

n.—	$(\neg\neg q \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)]$	
$n + 1$.—	$(\neg\neg q \rightarrow q)$	
$n + 2$.—	$[(p \rightarrow \neg\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)]$	RD $n, n + 1$

[137] El paso de 2 a 3 en esta demostración se efectúa en virtud de la definición del condicional como una disyunción con el primer miembro negado. Es eso lo que indicamos al margen mediante la abreviatura 'Df. →'. El lector puede sentirse extrañado de que, después de haber insistido tanto en que las únicas transformaciones autorizadas en el sistema son las *explícitamente* autorizadas, echemos ahora mano de un recurso deductivo que no aparece recogido entre las Reglas de Transformación. Pero es que se da por descontado que las expresiones que son *equivalentes* (es decir, interdefinibles *contextualmente*) son, por ello mismo, intercambiables en cualquier momento. Y además, la sustitución de las unas por las otras no está sujeta a la restricción que opera en las aplicaciones de la Regla de Sustitución. En este último caso, como veíamos, la sustitución debía realizarse necesariamente en todos los lugares en los que apareciera la variable a sustituir. Cuando se trata del intercambio de expresiones equivalentes, no: no hay necesidad de efectuar la sustitución en todos los casos. Es decir, que en rigor, hubiéramos podido pasar de la expresión

$$[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \rightarrow [\neg q \vee (\neg p \vee r)]$$

Lo llamaremos 'Teorema 2'[138].

Teorema 3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$.

Demostración:

1.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$	A5
2.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r)]$	RS$(p/\neg p)$, 1
3.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	Df. $\rightarrow$, 2

Teorema 4. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$.

Demostración:

1.	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$	T2
2.	$\{(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]\} \rightarrow \{(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]\}$	RS$[p/(q \rightarrow r), q/(p \rightarrow q), r/(p \rightarrow r)]$, 1
3.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	T3
4.	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	RD, 2, 3

Teorema 5. $p \rightarrow p$.

Demostración:

1.	$p \rightarrow (p \vee p)$	T1
2.	$(p \vee p) \rightarrow p$	A1
3.	$p \rightarrow p$	?

¿Cómo justificar el paso de 2 a 3 en esta demostración?
No hemos aplicado, para llegar ahí, ninguna de las dos reglas de

a una expresión como

$$[p \rightarrow (\neg q \vee r)] \rightarrow [q \rightarrow (\neg p \vee r)],$$

o como

$$[\neg p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (\neg p \vee r)]$$

o como

$$[p \rightarrow (\neg q \vee r)] \rightarrow [\neg q \vee (p \rightarrow r)]$$

Etc.

Si hemos aplicado la definición en todos los casos es únicamente porque así nos convenía con vistas a obtener como teorema la expresión cuya demostración buscábamos.

[138] Las demostraciones —como se puede ver por las dos que hasta ahora hemos presentado— llevan unas inscripciones en su margen derecha. Esas inscripciones no indican otra cosa que la justificación de cada uno de los pasos que se han dado en la demostración. 'A4', como inscripción en la margen derecha, por ejemplo, quiere decir que la expresión a cuyo borde está es el axioma que, en la lista de éstos, lleva el número 4. 'RS(q/p), 1' quiere decir que hemos aplicado a la línea 1 de la demostración de que se trate la Regla de Sustitución en el sentido de reemplazar q por p. Etc.

transformación. Tampoco hemos echado mano de las definiciones que nos permiten sustituir expresiones equivalentes.

Y, sin embargo, estos son —al menos por lo que hasta ahora hemos dicho— los únicos recursos de que podemos hacer uso en una demostración.

Por lo demás, el paso de 2 a 3 parece *intuitivamente* claro. En efecto: si algo es condición (suficiente) de otra cosa, y esa otra cosa es condición de una tercera, parece razonable concluir que la primera ha de ser condición de la tercera. Y así, parece haber una «justificación» intuitiva de la transición de 2 a 3 en la demostración del Teorema 5. Si, como nos muestra el Teorema 1, 'p' es condición de '$p \vee p$', y si, como el Axioma 1 hace patente, '$p \vee p$' es condición de 'p', resultaría extraño no llegar a la conclusión de que 'p' es condición de 'p' ('$p \rightarrow p$')[139].

Pero, en lógica, con la intuición no basta. Mejor dicho: en lógica sobra la intuición. La historia de la lógica contemporánea es la historia del destierro de la intuición del reino de la lógica. En lugar de la intuición, la formalización. Y la formalización supone la explicitación de todo el desarrollo deductivo, la programación del curso entero de la demostración: del punto de partida, del término de la demostración y de los pasos intermedios.

Y, sin embargo, está el Teorema 4. Y ese teorema —'$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$'— muestra que, si lo enunciado por una proposición es condición de lo enunciado por otra, entonces, en el caso de que lo enunciado por esta segunda proposición sea a su vez condición de lo enunciado por una tercera, necesariamente lo enunciado por la primera será condición —a través de una proposición interpuesta— de lo enunciado por la tercera.

Extraigamos la moraleja deductiva de este teorema. Traduzcamos este teorema al metalenguaje del cálculo, igual que, por ejemplo, podríamos traducir la conducta real de una persona en regla moral de nuestra propia conducta. La traducción metalingüística de esa tautología rezaría, por ejemplo, como sigue: «Si '$X \rightarrow Y$' es una tesis del sistema, entonces, si '$Y \rightarrow Z$' es una tesis del sistema, es también una tesis del sistema '$X \rightarrow Z$'». O dicho de otro modo: «Si '$X \rightarrow Y$' e '$Y \rightarrow Z$' son tesis del sistema, entonces '$X \rightarrow Z$' es una tesis del sistema». Y esta regla sí que permite dar el paso de 2 a 3 como nosotros hemos hecho.

Ahora bien: lo que hemos hecho no es otra cosa que enunciar una nueva regla de transformación. Se trata de una regla *derivada*. Derivada con respecto a las otras dos, las fundamentales. Basta sustituir p por X, q por Y y r por Z en la demostración del Teorema 4 para obtener una derivación de esta regla. Si las reglas de transformación pertenecen al metalenguaje del cálculo, la demostración de una regla nueva a partir de otras reglas de inferencia tendrá que estar enunciada —por

[139] Ocurre simplemente que en el ejemplo se da el caso de que lo primero y lo tercero son idénticos.

cuanto en ella se *mencionan* expresiones metalingüísticas— en el meta-metalenguaje del cálculo.

Es evidente que la posibilidad que acabamos de desarrollar —la posibilidad de traducir una cierta tesis del sistema a regla de inferencia que nos permita transformar unas expresiones en otras dentro del mismo— puede hacerse extensiva a cualquier otra tautología, sea ésta un axioma o un teorema. Puesto que la tautología a la que estamos aludiendo refleja la propiedad transitiva del condicional[140], nos referiremos a ella, en aquellos casos en que la empleemos, mediante la abreviatura 'Tr. →'. Cuando quiera que, en lo que resta de este apartado, utilicemos como reglas de inferencia trasuntos metalingüísticos de tesis del sistema, lo haremos constar en nota, especificando además la abreviatura correspondiente.

Igualmente —y esto es importante para la demostración, más abajo, del Teorema 17— podríamos extraer del Teorema 3 (que, después de todo, viene a decir lo mismo que el Teorema 4, sólo que en otro orden) una regla que nos permitiera pasar de '$Y \rightarrow Z$' y '$X \rightarrow Y$' a '$X \rightarrow Z$'. La llamaremos también 'Tr. →'.

Con todo esto, la demostración del Teorema 5 queda así:

1.	$p \rightarrow (p \vee p)$	T5
2.	$(p \vee p) \rightarrow p$	A1
3.	$p \rightarrow p$	Tr. →, 1, 2

Teorema 6. $\neg p \vee p$.

Demostración:

1.	$p \rightarrow p$	T5
2.	$\neg p \vee p$	Df. →, 1

Teorema 7. $p \vee \neg p$.

Demostración:

1.	$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$	A3
2.	$(\neg p \vee p) \rightarrow (p \vee \neg p)$	RS $(p/\neg p, q/p)$, 1
3.	$\neg p \vee p$	T6
4.	$p \vee \neg p$	RD, 2, 3

Teorema 8. $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

Demostración:

1.	$(p \vee p) \rightarrow p$	A1
2.	$(\neg p \vee \neg p) \rightarrow \neg p$	RS $(p/\neg p)$, 1
3.	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$	Df. →, 2

[140] No es, en rigor, más que una reformulación de la ley que en la relación de leyes seleccionadas del apartado anterior llevaba el número 15.

Teorema 9. $(\neg p \to p) \to p$

Demostración:

1.	$(p \vee p) \to p$	A1
2.	$(\neg p \to p) \to p$	Df. $\vee$, 1

Teorema 10. $p \to \neg\neg p$

Demostración:

1.	$p \vee \neg p$	T7
2.	$\neg p \vee \neg\neg p$	RS $(p/\neg p)$, 1
3.	$p \to \neg\neg p$	Df. $\to$, 2

Teorema 11. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

Demostración::

1.	$(q \to r) \to [(p \to q) \to (p \to r)]$	T3
2.	$(q \to \neg\neg q) \to [(p \to q) \to (p \to \neg\neg q)]$	RS $(r/\neg\neg q)$, 1
3.	$(p \to \neg\neg p)$	T10
4.	$(q \to \neg\neg q)$	RS (p/q), 3
5.	$(p \to q) \to (p \to \neg\neg q)$	RD, 2, 4
6.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
7.	$(\neg p \vee \neg\neg q) \to (\neg\neg q \vee \neg p)$	RS $(p/\neg p, q/\neg\neg q)$, 6
8.	$(p \to \neg\neg q) \to (\neg q \to \neg p)$	Df. $\to$, 7
9.	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	Tr. $\to$, 5, 8

Teorema 12. $p \to (p \vee q)$

Demostración:

1.	$q \to (p \vee q)$	A2
2.	$p \to (q \vee p)$	RS $(q/p, p/q)$, 1
3.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
4.	$(q \vee p) \to (p \vee q)$	RS $(p/q, q/p)$, 3
5.	$p \to (p \vee q)$	Tr. $\to$, 2, 4

Teorema 13. $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$

Demostración:

1.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
2.	$(\neg p \vee \neg q) \to (\neg q \vee \neg p)$	RS $(p/\neg p, q/\neg q)$, 1
3.	$(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$	Df. $\to$, 2

Teorema 14. $[p \vee (q \vee r)] \to [(p \vee q) \vee r]$.

Demostración:

1.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3
2.	$(q \vee r) \to (r \vee q)$	RS $(p/q, q/r)$, 1
3.	$(q \to r) \to [(p \vee q) \to (p \vee r)]$	A5
4.	$[(q \vee r) \to (r \vee q)] \to \{[p \vee (q \vee r)] \to [p \vee (r \vee q)]\}$	RS $[q/(q \vee r), r/(r \vee q)]$, 3
5.	$[p \vee (q \vee r)] \to [p \vee (r \vee q)]$	RD, 2, 4
6.	$[p \vee (q \vee r)] \to [q \vee (p \vee r)]$	A4
7.	$[p \vee (r \vee q)] \to [r \vee (p \vee q)]$	RS $(q/r, r/q)$, 6
8.	$[p \vee (q \vee r)] \to [r \vee (p \vee q)]$	Tr. $\to$, 5, 7
9.	$[r \vee (p \vee q)] \to [(p \vee q) \vee r]$	RS $[p/r, q/(p \vee q)]$, 1
10.	$[p \vee (q \vee r)] \to [(p \vee q) \vee r]$	Tr. $\to$, 8, 9

Teorema 15. $[p \to (q \to r)] \to [(p \wedge q) \to r]$

Demostración:

1.	$p \to p$	T5
2.	$[p \to (q \to r)] \to [p \to (q \to r)]$	RS $[p/(p \to (q \to r))]$, 1
3.	$[p \to (q \to r)] \to [\neg p \vee (\neg q \vee r)]$	Df. $\to$, 2
4.	$[p \vee (q \vee r)] \to [(p \vee q) \vee r]$	T15
5.	$[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \to [(\neg p \vee \neg q) \vee r]$	RS $(p/\neg p, q/\neg q)$, 4
6.	$[p \to (q \to r)] \to [(\neg p \vee \neg q) \vee r]$	Tr. $\to$, 3, 5
7.	$(p \vee q) \to (\neg p \to q)$	141
8.	$[(\neg p \vee \neg q) \vee r] \to [\neg (\neg p \vee \neg q) \to r]$	RS $[p/(\neg p \vee \neg q), q/r]$, 7
9.	$[p \to (q \to r)] \to [\neg (\neg p \vee \neg q) \to r]$	Tr. $\to$, 6, 8
10.	$[p \to (q \to r)] \to [(p \wedge q) \to r]$	Df. $\wedge$, 9

Teorema 16. $\neg\neg p \to p$

Demostración:

1.	$(q \to r) \to [(p \vee q) \to (p \vee r)]$	A5
2.	$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to [(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg\neg\neg p)]$	RS $(q/\neg p, r/\neg\neg\neg p)$, 1
3.	$p \to \neg\neg p$	T10
4.	$\neg p \to \neg\neg\neg p$	RS $(p/\neg p)$, 3
5.	$(p \vee \neg p) \to (p \vee \neg\neg\neg p)$	RD, 2, 4
6.	$p \vee \neg p$	T7
7.	$p \vee \neg\neg\neg p$	RD, 5, 6
8.	$(p \vee q) \to (q \vee p)$	A3

141 Supongamos demostrada como teorema esta expresión —que no es sino la traducción al lenguaje del cálculo de la definición '$X \vee Y = Df \neg X \to Y$'.

9. $(p \vee \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \vee p)$ — RS $(q/\neg\neg\neg p)$, 8
10. $\neg\neg\neg p \vee p$ — RD, 7, 9
11. $\neg\neg p \rightarrow p$ — Df. $\rightarrow$, 10

Teorema 17. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$.

Demostración:

1. $q \rightarrow (p \vee q)$ — A2
2. $r \rightarrow (p \vee r)$ — RS (q/r), 1
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$ — A5
4. $[r \rightarrow (p \vee r)] \rightarrow \{(q \vee r) \rightarrow [q \vee (p \vee r)]\}$ — RS $[p/q, q/r, r/(p \vee r)]$, 3
5. $(q \vee r) \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — RD, 2, 4
6. $\{(q \vee r) \rightarrow [q \vee (p \vee r)]\} \rightarrow \{[p \vee (q \vee r)] \rightarrow \langle p \vee [q \vee (p \vee r)]\rangle\}$ — RS $[q/(q \vee r), r/(q \vee (p \vee r))]$, 3
7. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow \{p \vee [q \vee (p \vee r)]\}$ — RD, 5, 6
8. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ — A3
9. $(r \vee p) \rightarrow (p \vee r)$ — RS $(p/r, q/p)$, 8
10. $p \rightarrow (r \vee p)$ — RS $(q/p, p/r)$, 1
11. $p \rightarrow (p \vee r)$ — Tr. $\rightarrow$, 9, 10
12. $(p \vee r) \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — RS $[q/(p \vee r), p/q]$, 1
13. $p \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — Tr. $\rightarrow$, 12, 11
14. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$ — A5
15. $\{p \rightarrow [q \vee (p \vee r)]\} \rightarrow \{\langle [q \vee (p \vee r)] \vee p\rangle \rightarrow \langle [q \vee (p \vee r)] \vee [q \vee (p \vee r)]\rangle\}$ — RS $[p/(q \vee (p \vee r)), q/p, r/(q \vee (p \vee r))]$, 14
16. $\{[q \vee (p \vee r)] \vee p\} \rightarrow \{[q \vee (p \vee r)] \vee [(q \vee (p \vee r)]\}$ — RD, 13, 15
17. $(p \vee p) \rightarrow p$ — A1
18. $\{[q \vee (p \vee r)] \vee [q \vee (p \vee r)]\} \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — RS $[p/(q \vee (p \vee r))]$, 17
19. $\{[q \vee (p \vee r)] \vee p\} \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — Tr. $\rightarrow$, 18, 16
20. $\{p \vee [q \vee (p \vee r)]\} \rightarrow \{[q \vee (p \vee r)] \vee p\}$ — RS $[q/(q \vee (p \vee r))]$, 8
21. $\{p \vee [q \vee (p \vee r)]\} \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — Tr. $\rightarrow$, 19, 20
22. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$ — Tr. $\rightarrow$, 21, 7

Como podrá observarse, este Teorema 17 es idéntico al Axioma 4. Quiere decirse, entonces, que hemos conseguido demostrar como teorema un axioma. Lo cual, a su vez, quiere decir que ese axioma *no es independiente* de los restantes, que puede ser demostrado a partir de ellos[142]. Por tanto, todo lo que se puede demostrar a partir de este

[142] Con la ayuda de algún teorema (en nuestro caso concreto, del Teorema 3, vertido a regla de inferencia).

axioma puede demostrarse también a partir sólo de los otros cuatro. Y habida cuenta de que, como hemos indicado ya alguna vez, en la presentación de un cálculo se tiende siempre al ahorro de elementos primitivos, nada tiene de extraño que —a partir de la demostración, por Bernays, en 1926, de la posibilidad de derivar este «axioma» de los otros cuatro— la expresión '$[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$' haya sido eliminada de la lista de axiomas, y reducidos éstos a los cuatro restantes.

Y aún a tres. En efecto: Łukasiewicz mostró que tomando como funciones primitivas la negación y el condicional —que es lo que ya había hecho Frege—, los cuatro axiomas de *Principia Mathematica* podrían ser sustituidos por estos otros tres:

A1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
A2. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
A3. $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

Pero aún hay más. Los axiomas podrían reducirse a uno. En este sentido Jean Nicod —que fue quien mostró esta posibilidad— no hizo sino, como alguien ha dicho, extraer las consecuencias axiomáticas de los resultados de Sheffer relativos a la reducción de todas las funciones monádicas y diádicas a una: la incompatibilidad, por ejemplo. Tomando esta función como la única primitiva, es posible —mediante la utilización de dos reglas de inferencia, la regla de sustitución y una regla de separación distinta de la que emplearon Whitehead y Russell[143]— proceder a una axiomatización completa de la lógica de enunciados. Completa, pero no cómoda. He aquí, en efecto, ese axioma omnipotente, que más tarde Łukasiewicz y Sobocinski conseguirían acortar, y Wajsberg —en un alarde digno de ser cantado por Borges— deducir de otro de la misma longitud:

$$[p \mid (q \mid r)] \mid \{[t \mid (t \mid t)] \mid \langle (s \mid q) \mid [(p \mid s) \mid (p \mid s)]\rangle\}$$

Así pues, cuando hablamos de '*el* cálculo de enunciados' lo hacemos por abreviar. Porque hay distintos cálculos de enunciados, distintas posibilidades de presentar axiomáticamente la teoría de las relaciones de inferencia entre proposiciones sin analizar.

Lógica pura y lógica aplicada

Lo que nosotros acabamos de hacer es mostrar la posibilidad de formalizar una teoría lógica, la lógica de enunciados. A lo largo de la

[143] Ésta: 'Si X es una tesis y $X \mid (Y \mid Z)$ lo es también, lo será asimismo Z'.

historia de la lógica lo normal fue presentar las leyes de la lógica de enunciados aisladas las unas de las otras y formuladas bien simplemente en el lenguaje natural, bien en un lenguaje natural enriquecido con algunos símbolos. Sólo recientemente —a partir de Boole, y, sobre todo, de Frege— se ha llegado a presentar la lógica de enunciados en la forma de un cálculo.

Lo que nosotros hemos hecho es presentar a la vez el cálculo y su interpretación como cálculo de la lógica de enunciados[144*]. Ya sabemos que podríamos no haberlo hecho así, que podríamos haber presentado el cálculo solo, y que si hemos hecho lo que hemos hecho es porque, como ya indicábamos en el capítulo anterior, la lógica es, para nosotros, eminentemente, investigación de los principios de la validez formal del razonamiento presentada en forma de cálculo, y no simplemente la teoría de la construcción de cálculos.

No simplemente, pero también. Y así, la lógica sería la teoría de la construcción de cálculos, y a la vez el resultado de interpretar con nociones lógicas algunos de esos cálculos por ella misma construidos. Con otras palabras: si la lógica se presenta ella misma como un lenguaje formalizado, la lógica puede emplearse también como instrumento para formalizar otros lenguajes. En el ejemplo que hemos estudiado —y por la sencilla razón de que este es un libro de lógica formal— todo quedaba dentro del reino de la pura lógica: las nociones fundamentales del sistema eran nociones lógicas (enunciado, negación, disyunción); de carácter lógico (es decir, lógicamente verdaderos) eran también los enunciados de partida del sistema, los axiomas; y los teoremas eran tautologías, verdades lógicas, formulaciones de esquemas válidos de inferencia.

Pero muy bien pudiera ocurrir que la teoría a formalizar no fuera una teoría lógica. Que ni sus nociones fueran nociones lógicas, ni sus enunciados —básicos o derivados— leyes lógicas, sino, por ejemplo, enunciados de la mecánica celeste, o de la genética, o de la teoría del aprendizaje. No se trataría, en estos casos, de una formalización de la lógica, sino de la formalización de una cierta teoría por medio de la lógica. Al desbordar el ámbito de la lógica pura y aplicar el cálculo a una materia extralógica, nos encontraremos con que los enunciados de partida del cálculo no serán ya verdades lógicas, sino, para decirlo de modo simplista, verdades materiales de la teoría en cuestión. Verdades materiales serán también los teoremas. Y la lógica no estaría, por lo tanto, ni en el punto de partida ni en el punto de llegada, sino a lo largo del camino: en la regulación de los procesos de deducción entre esos enunciados que no le pertenecen.

[144*] El lector tal vez se pregunte por la suerte que ha corrido la lógica de clases. En otra parte de este libro volverá a saber de ella, y sabrá también por qué ahora la estamos olvidando.

3. La lógica de enunciados como sistema de reglas de inferencia

El razonamiento natural

La lógica presenta el resultado de sus análisis en forma de leyes que expresan esquemas válidos de inferencia, moldes correctos de razonamiento tales que, interpretadas sus variables con enunciados cualesquiera, si los enunciados que han pasado a contruir las premisas son verdaderos, verdadero será también, y necesariamente, el enunciado que aparece como conclusión.

A juzgar por lo visto hasta ahora, parece como si el sujeto —un sujeto cualquiera, una especie de sujeto razonante ideal, por analogía con el «hablante-oyente ideal» con que operan los lingüistas —procediera, cada vez que realiza un razonamiento, del siguiente modo: eligiendo —de entre un repertorio de formas válidas de razonar que habría que suponer alojado en algún departamento de su cerebro— la forma apropiada al caso, interpretando luego los lugares vacíos de ésta —indicados por las variables de enunciado— con los contenidos a que trate de aludir, y exponiendo finalmente el razonamiento así elaborado a un interlocutor tan capacitado como él para reconocer cuándo un razonamiento es válido, e incapaz, por tanto, en ese caso, de aceptar las premisas y a la vez rechazar la conclusión.

No sería extraño, sin embargo, que las cosas ocurrieran de otro modo. En primer lugar, parece claro que la generalidad de los sujetos tiene gran dificultad para aislar la forma del contenido y hacer consideraciones puramente formales[145]. Por lo demás, los sujetos se limitan a realizar razonamientos que de hecho tienen una determinada forma. Si al sujeto se le preguntara qué es lo que él hace cuando hace un razonamiento, posiblemente diría —en el caso de que se trate de un sujeto bien dotado para la reflexión— que comienza por sentar unas premisas y extrae luego una conclusión que se apoya en ellas, que tiene a aquéllas como fundamento. Representar el razonamiento del sujeto mediante el simbolismo lógico supone «poner en limpio» *a posteriori* la forma implícita del razonamiento, algo en lo que, como decimos, el sujeto no ha reparado. Al obrar así hemos realizado una especie de radiografía del razonamiento, un retrato de su osamenta. Pero en las fotografías las figuras están quietas. Dicho de otro modo, y abandonando ya la metáfora: al representar la estructura del razonamiento mediante una ley lógica —si es que el sujeto ha realizado un razonamiento formalmente co-

[145] Y no se trata siquiera de que los sujetos lo intenten espontáneamente y les resulte difícil, sino de que les resulta difícil cuando se les insta a que lo hagan en situaciones experimentales apropiadas.

rrecto— nos estamos limitando a hacer un croquis de su inferencia, a presentar esquemáticamente el recorrido argumental del sujeto, pero no estamos repitiendo —de forma analizada— el curso de su razonamiento, estamos perdiéndonos el *proceso* de inferencia, es decir, el *paso* de las premisas a la conclusión. Estaríamos aplicando el análisis lógico para hacer, por así decir, una «instantánea» del razonamiento. Y de lo que se trata es de aplicar el análisis lógico «cinematográficamente».

Mejor sería, entonces, describir el comportamiento raciocinante del sujeto diciendo que ha consistido en pasar de uno o más enunciados —las premisas— a un enunciado al que aquéllas sirven de justificación. Y ese paso sólo puede estar justificado en virtud de una regla de inferencia. Y las reglas de la inferencia —deductiva— pertenecen a la lógica formal. No así —o no así necesariamente, ni siquiera frecuentemente— las premisas y la conclusión. Lo normal es que las premisas y la conclusión no sean enunciados formalmente verdaderos, sino enunciados verdaderos empíricamente. Y eso no siempre, porque pudiera ocurrir que se tratara de simples hipótesis —es decir, de enunciados cuyo valor de verdad está por ver[146]— o incluso de enunciados de los que se sabe —o, al menos, se piensa, lo cual para el caso viene a ser lo mismo— que son falsos. La lógica, en efecto, es, ya lo hemos dicho, la ciencia del razonamiento *coherente*. Y se puede ser coherente aunque no se parta de premisas verdaderas. En efecto: ser coherente consiste en aceptar como verdadero lo que se seguiría de las premisas *si éstas fueran verdaderas* (lo sean o no de hecho). Pongamos un ejemplo sangrante: una persona —si cabe llamarle así— puede «pensar» que hay razas superiores (entre ellas, casualmente, la suya propia); en ese caso, lo coherente sería que dicha «persona», llegado el caso, no tuviera serios inconvenientes en exterminar o esclavizar a los individuos pertenecientes a razas «inferiores». Recuérdese una vez más la definición que hemos dado de 'razonamiento formalmente válido': una razonamiento es formalmente válido cuando, si sus premisas son verdaderas, entonces necesariamente lo es también la conclusión. En ningún momento se dice que las premisas deban ser verdaderas (y mucho menos formalmente verdaderas). Su verdad se presenta a título de hipótesis: si lo son, lo será también la conclusión; si no lo son, el valor de verdad de la conclusión puede ser cualquiera.

En resumen: que si a un sujeto que razonara con naturalidad y a la vez fuera capaz de describir en términos lógicos su propio proceso de razonamiento se le pidiera que hiciera esto último, no diría:

[146] Como cuando el científico *contrasta* sus hipótesis haciendo —y estamos idealizando los casos más simples de contrastación— inferencias del tipo de la siguiente: «Si mi hipótesis es verdadera, entonces se producirán tales y tales consecuencias en la forma de hechos observables. Es así que esas consecuencias no se han producido, según he podido comprobar. Luego mi hipótesis ha de ser retirada». Decir que esa inferencia tiene la forma '$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$' resultaría inadecuado, por lo que hemos dicho más arriba y en seguida precisaremos.

> Es formalmente verdadero el enunciado '...', que expresa el razonamiento que acabo de realizar cuyas premisas son, además, de hecho verdaderas.

sino

> Lo que acabo de decir es que si aceptamos como premisa la proposición de que ..., hemos de aceptar inevitablemente como conclusión la proposición de que ... .

Y esa obligatoriedad *(hemos de ...)* en el paso de las premisas a la conclusión la imprime —sólo podría imprimirla— una regla de inferencia, un dispositivo lógico que, a partir de unas premisas con una forma determinada, arrastra una determinada conclusión.

Pero aún hay más: no sólo es que el papel de la lógica en el razonamiento natural se manifieste bajo la forma de reglas de inferencia más bien que bajo la forma de leyes. Es que, por otra parte, y como ya hemos indicado hace un instante, el punto de partida, en los razonamientos que hacemos ordinariamente, no está constituido prácticamente nunca por enunciados formalmente verdaderos, sino por enunciados verdaderos de hecho, por enunciados que se nos antojan plausibles, por enunciados oscuramente verdaderos —y cuyo valor de verdad pudiera quizá aclararse precisamente extrayendo sus consecuencias—, o incluso por enunciados reconocidamente falsos, pero cuyas implicaciones nos interesa conocer.

Recordemos, sin embargo, cómo procede la demostración en un sistema axiomático[147]. Allí partíamos siempre de enunciados formalmente verdaderos —axiomas, o teoremas ya demostrados—, para llegar, transformando tautológicamente esas expresiones, a enunciados que son también formalmente verdaderos.

Ciertamente, podríamos aplicar la lógica, en la forma de sistema axiomático, al análisis de la inferencia natural. Podríamos, por ejemplo, ante un razonamiento ordinario proferido por un sujeto cualquiera, extraer su forma y tratar luego de deducir ese esquema como teorema. Si lo consiguiéramos, habríamos demostrado que la expresión es una ley, y, por ende, que el razonamiento del sujeto era formalmente válido. Pero este modo de analizar el razonamiento natural resultaría en exceso artificial.

Leyes y reglas

Puesto que el razonamiento natural opera, desde un punto de vista lógico, a base de reglas de inferencia, y puesto que la lógica pretende

[147] En un sistema axiomático que constituya la formalización de una teoría lógica. Olvidémonos ahora de todos los sistemas axiomáticos relativos a otros campos de objetos.

constituir el análisis sistemático del razonamiento desde el punto de vista de su forma, parecería razonable, en aras de una más ajustada aplicabilidad de nuestra ciencia a su objeto propio, hacer el intento de presentar la lógica como *sistema de reglas de inferencia*. Vayamos por partes.

En primer lugar, ¿qué es una regla de inferencia? ¿Cuántas reglas de inferencia hay o podría haber?

¿Recuerda el lector cuántas leyes había en el cálculo de enunciados? Recordémoslo: infinitas. Pues bien: infinitas son también en número las reglas de inferencia. Y ello por la sencilla razón de que a cada ley corresponde una regla y a cada regla corresponde una ley. El conjunto de las leyes y el conjunto de las reglas son conjuntos equivalentes.

Una ley y una regla son lo mismo, sólo que dicho de dos maneras distintas. Una ley es un enunciado de la lógica. Una regla, también. Pero una ley es el enunciado de un esquema válido de inferencia, mientras que una regla es el enunciado de una instrucción para realizar una inferencia válida.

Los ejemplos señalarán mejor la diferencia entre unas y otras.

Tomemos una ley:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p.$$

Cualquier enunciado que tenga esta forma será verdadero, formalmente verdadero. Y, puesto que lo que acabamos de enunciar es una forma válida de inferencia, cualquier inferencia que posea esa estructura será una inferencia válida.

Pero hemos dicho que a cada ley corresponde una regla. He aquí la regla que correspondería a esa ley:

'Si tomamos como premisas un condicional y la negación de su consecuente, podemos inferir la negación de su antecedente como conclusión'.

¿Cómo formalizar —pues parecería deseable— el enunciado de esta regla? Es evidente que las leyes están escritas en el lenguaje del cálculo. Y es igualmente evidente que las reglas lo están en el metalenguaje. En la formalización de esta regla correspondiente al *modus tollendo tollens* hemos empleado términos tales como 'premisas', 'condicional', 'negación', 'conclusión', 'consecuente', etc., términos todos que pertenecen siempre a un metalenguaje, en la medida en que están destinados, *ex officio*, a *mencionar* expresiones de un lenguaje —de un lenguaje lógico-formal, concretamente. Para referirnos a ellos hemos de utilizar, pues, variables metalingüísticas. Metalingüísticas, por lo que acabamos de decir. Variables, porque el enunciado de una regla es un enunciado general, aplicable a cualesquiera expresiones que tengan las características exigidas por la regla.

Podríamos, entonces, abreviar la formulación de nuestra regla diciendo:

«Si tomamos como premisas una expresión de la forma '$X \rightarrow Y$' y una expresión de la forma '$\neg Y$', podemos inferir como conclusión una expresión de la forma '$\neg X$'». «Podemos inferir». ¿Qué es lo que queremos decir con eso? Queremos decir, en nuestro ejemplo, que la expresión '$\neg X$' es *válidamente deducible* a partir de '$X \rightarrow Y$' y '$\neg Y$', que aquélla se sigue formalmente de éstas, que unas premisas como esas *implican* una conclusión de esa forma. Ya hemos indicado que el condicional puede servir para *reflejar*, para *mostrar*[148] la implicación de un enunciado o esquema de enunciados por otro. Pero, independientemente de esta posibilidad de verterla al lenguaje del cálculo —mediante un condicional lógicamente verdadero—, lo cierto es que la relación de deducibilidad pertenece al metalenguaje. No es, en efecto, una relación entre expresiones del cálculo, sino entre los nombres de esas expresiones: de la expresión '...' es deducible la expresión '...' Las comillas denuncian el carácter metalingüístico de lo que no está abarcado por ellas. Y la expresión 'es deducible' no lo está, en el párrafo anterior. Simbolizarla mediante un condicional, sería traicionar todas las consideraciones que hemos venido haciendo en lo que va de este apartado. La simbolizaremos, como es costumbre, mediante una raya horizontal que separa las premisas de la conclusión. Por tanto, al escribir

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

estamos diciendo que cualquier expresión como la que figura debajo de la raya es deducible de cualesquiera expresiones que tengan la misma forma que las expresiones inscritas sobre ella.

Acabamos de formular una regla de inferencia.

Formulemos otra:

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow Z \end{array}$$

A esta regla, en justa correspondencia, corresponde una ley:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r).$$

148 En el sentido que Wittgenstein da a ese término (*zeigen*) en su *Tractatus Logico-Philosophicus*.

Puesto que, en principio, ni las reglas tienen preferencia sobre las leyes ni éstas sobre aquéllas, lo mejor sería quizá presentar su mutua correspondencia en línea:

Ley	*Regla en lenguaje técnico*	*Regla en símbolos*
$[(p \to q) \wedge p] \to q$	Si tomamos como premisas un condicional y su antecedente podemos inferir el consecuente como conclusión.	$X \to Y$ X ——— Y
	$[(p \to q) \wedge (p \to \neg q)] \to \neg p$	
$[(p \to q) \wedge (p \to \neg q)] \to \neg p$	Si de una proposición se siguen a la vez un enunciado y su negación, podemos inferir la negación de esa proposición.	$X \to Y$ $X \to \neg Y$ ——— $\neg X$

Como, en Occidente al menos, es costumbre leer los textos de izquierda a derecha, la disposición que hemos adoptado pudiera hacer pensar al lector que después de todo las leyes son antes que las reglas. Saquémosle de esa ocasión de error trastocando el orden a lo ancho de la página:

Regla en símbolos	*Regla en lenguaje técnico*	*Ley*
$X \vee Y$ $\neg X$ ——— Y	Si tomamos como premisas una disyunción y la negación de uno de sus miembros, podemos inferir el otro miembro como conclusión.	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$

Etcétera.

Así pues, podemos presentar los modos válidos de razonar indiferentemente en la forma de leyes o en la forma de reglas. Se trata, sin embargo, de una indiferencia tan sólo en la teoría. En la práctica —es decir, según lo que se pretende hacer con la lógica— hay razones para inclinarse por una forma de presentación más bien que por otra. Y así, cuando de lo que se trata —como ahora sucede— es de buscar

una aplicación más ajustada de la lógica al análisis del razonamiento común —tanto en la vida cotidiana como en la ciencia—, de dar cuenta formalmente de los procedimientos naturales de deducción, parece preferible la presentación de la lógica en forma de reglas de inferencia.

Pero hemos dicho mal. O, mejor dicho, no lo hemos dicho todo. Hemos dicho que la lógica puede presentarse bien en forma de leyes, bien en forma de reglas. Y debiéramos haber dicho que la lógica puede presentarse en forma de *sistema* de reglas o en forma de *sistema* de leyes, a elegir. Ya hemos explicado, en efecto, que la lógica es una ciencia, y, por ende, un sistema. Y ya hemos visto que la teoría lógica más elemental se puede presentar como sistema de leyes. Porque es que no nos hemos limitado a dar una lista de leyes de la lógica de enunciados. Hemos, además, presentado esas leyes en forma de cálculo: fundamentado todas y cada una de ellas a partir de unas pocas establecidas como axiomas.

Por lo tanto, de lo que se trata ahora es de presentar, *alternativamente*, la lógica de enunciados como sistema de reglas de inferencia. No simplemente de dar una lista de reglas paralelas a la lista de leyes que aparecía en el apartado 1, sino de sistematizar las reglas, de presentar la casi totalidad de éstas como reglas derivadas a partir de un pequeño número de reglas primitivas. Puesto que es posible derivar todas las leyes a partir de unas pocas leyes-axiomas que se pueden contar con los dedos de una mano, y puesto que las reglas no son sino un trasunto de las leyes —o viceversa—, podemos también derivar el resto de las reglas de inferencia a partir de un conjunto de reglas primitivas. Ahora bien: cuando derivamos un enunciado dentro de un sistema lo hacemos de acuerdo con determinadas reglas de inferencia. Cuando lo que se deriva son justamente reglas de inferencia —es decir, expresiones que son metalingüísticas por respecto a los enunciados en cuya derivación intervienen—, las reglas de inferencia que permiten derivarlas serán, en cuanto metarreglas de inferencia, meta-metalingüísticas. Repare el lector en que, si tomamos como nivel básico el de un razonamiento cualquiera expresado en un lenguaje natural, nos hallamos ante cuatro niveles distintos de lenguaje:

Nivel 0. El razonamiento en cuestión, formulado, por ejemplo, en castellano. Sea el siguiente razonamiento: 'Si Dios no existe y todo está permitido, entonces vamos inexorablemente hacia el caos. Ahora bien: no vamos hacia el caos. Por otra parte, Dios no existe. Luego no todo está permitido'[149].

[149] Para la confección de este razonamiento nos hemos inspirado en una afirmación formulada, si mal no recordamos, por Ivan Karamazov en la novela de F. Dostoievski cuyo título hace mención de Ivan y sus hermanos.

Nivel 1. La expresión del resultado de formalizar este razonamiento, la presentación de su forma separada del contenido:

$$\begin{array}{c} (\neg p \wedge q) \rightarrow r \\ \neg r \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

Nivel 2. La regla de inferencia que nos permite realizar un razonamiento de esa forma, que nos autoriza a pasar de unas premisas con esa estructura a una conclusión como ésa:

$$\begin{array}{c} (\neg X \wedge Y) \rightarrow Z \\ \neg Z \\ \neg X \\ \hline \neg Y \end{array}$$

Nivel 3. La derivación de esta regla de inferencia —puesto que normalmente se la consideraría como una regla derivada— a partir de otra u otras reglas primitivas.

Supongamos, en efecto, que contáramos ya con —como mínimo— estas cuatro reglas admitidas a título de reglas básicas:

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}\text{[150]} \qquad \begin{array}{c} X \vee Y \\ \neg X \\ \hline Y \end{array}\text{[151]} \qquad \begin{array}{c} \\ \neg (X \wedge Y) \\ \hline \neg X \vee \neg Y \end{array}\text{[152]} \qquad \begin{array}{c} \\ \neg\neg X \\ \hline X \end{array}\text{[153]}$$

Podríamos, entonces, derivar nuestra regla a partir de estas otras cuatro:

1.	$(\neg X \wedge Y) \rightarrow Z$	Premisa [154]
2.	$\neg Z$	Premisa [154]
3.	$\neg X$	Premisa [154]

[150] Por constituir esta regla, como tantas veces hemos dicho, una traducción metalingüística del *modus tollendo tollens*, la llamaremos por ahora 'MT'.

[151] Traducción metalingüística de la primera de las leyes de Inferencia de la Alternativa. La llamaremos por ahora 'IA'.

[152] Traducción metalingüística de una de las leyes de De Morgan. La llamaremos 'DeM', por ahora.

[153] Traducción metalingüística de la ley de doble negación. La llamaremos 'DN'.

[154] Es obvio —aunque, de todas maneras, lo explicaremos más adelante— que si lo que queremos es demostrar que expresiones de una forma determinada se infieren de expresiones que tienen una determinada forma, hemos de aceptar esta últimas a título de premisas.

4.	$\neg(\neg X \wedge Y)$	MT, 1, 2
5.	$\neg\neg X \vee \neg Y$	DeM, 4 [155]
6.	$X \vee \neg Y$	DN, 5
7.	$\neg Y$	IA, 6, 3 [156]

Tomando como premisas '$(\neg X \wedge Y) \rightarrow Z$', '$\neg Z$' y '$\neg X$', hemos inferido '$\neg Y$'. La legitimidad de esa inferencia entre cualesquiera expresiones de esa forma, la representaremos entonces así:

$$\begin{array}{c} (\neg X \wedge Y) \rightarrow Z \\ \neg Z \\ \neg X \\ \hline \neg Y \end{array}$$

Con lo cual hemos obtenido la regla que buscábamos. Al decir que la hemos obtenido queremos decir que hemos conseguido demostrarla a partir de otras reglas de acuerdo con un principio de orden superior.

Presentar la lógica —o, por ahora, la lógica de enunciados tan sólo— como un sistema de reglas de inferencia significa, entonces, elegir un conjunto de reglas básicas y derivar (o mostrar la posibilidad de derivar) de él el conjunto —potencialmente infinito— de las restantes. Todo consiste, por tanto, en hacer un *cálculo* de reglas, en lugar de un cálculo de leyes. Y puesto que al construir un cálculo de ese tipo no buscamos otra cosa —según hemos dicho al comienzo de este apartado, en la exposición de motivos— que poder llevar a cabo un análisis lógico más fiel de la inferencia *natural*; y puesto que las inferencias de las que —al menos primeriamente— se ocupa la lógica son las inferencias *deductivas*, a nadie puede extrañar que un sistema de este tipo reciba el nombre de «*cálculo de deducción natural*». Lo que estamos haciendo, en efecto, no es otra cosa que dar forma de cálculo a la forma natural de deducir.

En purísima lógica, de lo que se trataría sería de deducir nuevas reglas más complejas a partir de un pequeño repertorio de reglas primitivas. Cuando de lo que se trata, en cambio, es de aplicar la

[155] Téngase presente, al aplicar la regla 'DeM' a este caso, que el primer miembro de la conjunción en 3 está ya negado ($\neg X$), por lo cual, tras aplicar la regla, ha de aparecer negado dos veces.

[156] Repárese en que en este caso la regla IA ha sido aplicada a una disyunción cuyo segundo miembro está negado,

$$X \vee \neg Y,$$

por lo cual, al disponer, como premisa, de la negación del primer miembro (línea 3 de la demostración) podemos afirmar el segundo, pero, desde luego, manteniéndolo tal como está, es decir, negado.

lógica a un material extralógico, se suele proceder eligiendo unas pocas reglas primitivas, derivando de éstas algunas reglas auxiliares —que, en rigor, no serían necesarias, pero que son muy útiles para abreviar las deducciones—, y dedicando unas y otras al análisis de la validez de cualquier inferencia sobre cualquier materia. Con esto basta. ¿Por qué?

Tomemos un ejemplo. Sea el siguiente razonamiento[157]: «"Los matrimonios podrían ser buenos, al menos durante un cierto tiempo, si hubiera armonía y satisfacción sexual. Pero para que eso ocurriera haría falta una educación que favoreciera la sexualidad, una experiencia sexual prenupcial y una emancipación con respecto a la moral convencional. *Ahora bien: estos mismos factores, que son los que permitirían realizar buenos matrimonios, significan al propio tiempo la condena de esta institución*"[158]. Luego[159] en los matrimonios no hay armonía ni satisfacción sexual.»

Formalicemos este razonamiento.

Esquematizaremos los enunciados con arreglo a las siguientes correspondencias:

p = 'hay armonía y satisfacción sexual'.
q = 'los matrimonios pueden ser buenos'.
r = 'se imparte una educación que favorece la sexualidad'.
s = 'hay experiencias sexuales prenupciales'.
t = 'se está emancipado con respecto a la moral convencional'.

Según esto, el razonamiento podría formalizarse así:

$$\begin{array}{l} `(p \rightarrow q)' \\ `(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p' \\ `(r \wedge s \wedge t) \rightarrow (q \wedge \neg q)' \\ \hline `\neg p' \end{array}$$

Supongamos ahora que disponemos de las tres reglas siguientes:

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \rightarrow (Y \wedge \neg Y) \\ \hline \neg X^{160} \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline X \rightarrow Y \mid Y \rightarrow X^{161} \end{array}$$

[157] Tomado de Wilhelm Reich: *La revolución sexual*. Parte Primera, Capítulo VII, 2, b.
[158] Los subrayados son de Reich.
[159] Dicho brevemente, abreviando las conclusiones de Reich.
[160] Esta regla, que luego presentaremos con otro nombre en una forma ligeramente modificada, no ofrece ninguna dificultad: si de un enunciado se siguen consecuencias contradictorias, podemos inferir su falsedad. Por tratarse de una forma de reducción al absurdo llamaremos a esta regla, por ahora ,'RA'.
[161] Es decir, que de un bicondicional, en cuanto que éste no es otra cosa que la

Procedamos entonces a intentar demostrar la validez formal de este razonamiento, a intentar mostrar que de unas premisas de esa forma se sigue una conclusión con esa estructura:

1.	$(p \rightarrow q)$	Premisa
2.	$(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p$	Premisa
3.	$(r \wedge s \wedge t) \rightarrow (q \wedge \neg q)$	Premisa
4.	$\neg (r \wedge s \wedge t)$	RA, 3
5.	$p \rightarrow (r \wedge s \wedge t)$	RDf. $\leftrightarrow$, 2
6.	$\neg p$	MT, 4, 5

Quiere esto decir que '$\neg p$' se infiere válidamente de esas premisas. Lo cual a su vez quiere decir que la expresión

$$\{(p \rightarrow q) \wedge [(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p] \wedge [(r \wedge s \wedge t) \rightarrow (q \wedge \neg q)]\} \rightarrow \neg p$$

es una tautología, una ley. Lo cual quiere a su vez decir que la expresión

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ W \leftrightarrow X \\ W \rightarrow (Y \wedge \neg Y) \\ \hline \neg X, \end{array}$$

que no es sino la versión metalógica, la traducción a regla de aquella ley, enuncia un procedimiento correcto de deducción, una regla correcta de inferencia que permite extraer de unas premisas una conclusión que se sigue válidamente de ellas. Podríamos entonces aplicar esta regla como regla derivada para abreviar toda deducción cuyas premisas tengan la misma forma que la de nuestro ejemplo. En efecto: contando con esa regla —a la que llamaremos, para abreviar 'RWR'[162]— la derivación que antes hemos realizado constaría de cuatro pasos, en lugar de seis:

1.	$p \rightarrow q$	Premisa
2.	$(r \wedge s \wedge t) \leftrightarrow p$	Premisa
3.	$(r \wedge s \wedge t) \rightarrow (q \wedge \neg q)$	Premisa
4.	$\neg p$	RWR, 1, 2, 3

conjunción de dos condicionales, podemos inferir cualquiera de los dos aisladamente. Llamaremos a esta regla, por ahora, 'RDf $\leftrightarrow$' (regla basada en la definición contextual del bicondicional).
[162] 'Regla Wilhelm Reich'.

Esta es la razón de que no necesitemos entregarnos a la demostración de más y más reglas hasta el infinito. Nos basta con unas pocas reglas primitivas y unas pocas reglas derivadas —aquellas cuya función de abreviación de las deducciones se haga necesaria con mayor frecuencia. Con eso basta, porque por cada derivación correcta que realicemos obtendremos la posibilidad de formular una nueva regla de inferencia: la que se obtendría enunciando que de cualesquiera premisas que tuvieran esa forma puede inferirse siempre válidamente una conclusión así contruida. La nueva regla de este modo obtenida sería algo así como la moraleja que extraemos de esa derivación y que nos permitirá abreviar ulteriores derivaciones de enunciados que tengan la misma estructura.

Deducción axiomática y deducción natural

No vamos todavía a presentar ese omnipotente sistema de reglas aristocráticas y reglas de clase media alta. Antes queda algo por aclarar.

Decíamos que la diferencia fundamental entre el modo axiomático de deducir y el modo natural de hacer inferencias deductivas era que en el primer caso se partía de enunciados formalmente verdaderos y a enunciados formalmente verdaderos se llegaba al cabo de la deducción, mientras que en el segundo se puede partir —y es eso lo más frecuente— de enunciados indeterminados en su valor de verdad o incluso declaradamente falsos, llegándose a enunciados que tampoco son tautológicos. Los enunciados formalmente verdaderos, verdaderos en virtud de su sola forma, son —y esto no es más que otra manera de decir lo mismo— verdaderos en todos los casos posibles, verdaderos para cualquier contenido que se adapte a esa determinada forma: son, en una palabra, *vacíos*. Y los razonamientos naturales[163], aunque a menudo se caractericen por su vaciedad, no son vacíos en este sentido. Dicho de otro modo (que es casi el mismo): las expresiones que obtenemos al finalizar las deducciones en un sistema axiomático son verdaderas por sí mismas, por razón de su propia estructura. Las que los sujetos obtienen a diario en las contadas ocasiones en que están iluminados por la lógica sólo son verdaderas si se acepta que lo son las premisas.

Veamos, con un ejemplo, las diferencias entre ambos modos de proceder. Ese mismo ejemplo nos servirá también, sin embargo, para mostrar las semejanzas. Ya hemos dicho, en efecto, que las diferencias son diferencias en el modo de presentar las cosas, y no en el modo de ser éstas.

[163] Entendiendo con esta expresión —consagrada, pero quizá no adecuada— los razonamientos que emplean los sujetos cuando, sin pensar ni por un momento en la forma lógica de los enunciados que están profiriendo, discuten, por ejemplo, de política, o de teología, o de moral sexual.

Supongamos que un individuo, al que llamaremos *F*, intenta despertar en otro individuo, cuyo nombre será *M*, impulsos autodestructivos, diciéndole —entre las muchas cosas que podría decirle— lo siguiente:

F. La felicidad, amigo mío, es imposible. En todo caso, si no es imposible, al menos está muy lejos. Verá usted por qué. Si intenta usted seriamente contribuir a hacer la revolución, tarde o temprano le introducirán en la cárcel, lo cual prácticamente nunca resulta grato. Ahora bien: ¿qué otra cosa puede hacer usted? ¿Integrarse en el sistema planetario de explotación? Puede usted hacerlo, por supuesto, pero entonces —siendo, como es usted, lúcido— pronto hará presa en usted la mala conciencia. Triste, es, pues, su destino: o la mazmorra o el remordimiento.

Y supongamos que el diálogo continúa así:

M. Ciertamente, sus presupuestos son irreprochables. Pero su conclusión me parece un tanto desesperanzada. Yo creo que hay otras salidas.

Y supongamos ahora que el primer hablante, *F*, es un lógico taimado que no ha exhibido hasta ahora su condición de tal, pero que la hace valer en este momento de una manera implacable:

F. De modo que acepta usted las premisas —así se llaman— de que parto, pero no la conclusión a la que llego. ¿No es eso? Bien. Formalicemos. Las premisas serían éstas:

1. $p \rightarrow r$
2. $q \rightarrow s$
3. $p \nleftrightarrow q$[164,165].

Y ésta sería la conclusión:

$$r \nleftrightarrow s.$$

Y el lógico *F*, seguro del carácter inexorable de la disciplina que profesa, prosigue:

F. Convendrá usted conmigo en que si se acepta que algo es condición suficiente de otra cosa y se acepta que se da lo primero, hay que aceptar necesariamente que se da lo segundo.

M. Desde luego.

[164] Esta premisa está implícita en la argumentación de F: «¿Qué otra cosa puede usted hacer?», le pregunta a M tras haberle presentado la posibilidad de hacer la revolución.

[165] Quizá no esté de más explicar por qué hemos formalizado esta premisa de este modo. Como la disyunción entre *p* y *q* es, esta vez, excluyente, y puesto que la disyunción excluyente es la negación del bicondicional, como muestra la inspección comparativa de sus respectivas tablas de verdad, representaremos la existencia de esa alternativa entre *p* y *q* negando que exista entre ellas la relación bicondicional.

F. Excelente. Vaya usted apuntando. Entonces usted acepta que hay una alternativa clara: o *p* o *q*. Esta es una de nuestras premisas.

Me acepta usted, por otra parte, que la primera de estas dos únicas posibilidades conduce a una situación, la situación de estancia en la cárcel, que representaremos mediante la variable *r*.

Reconoce usted, en tercer lugar, que la segunda de las alternativas nos lleva a la mala conciencia, estado de cosas cuya existencia representamos mediante la variable *s*. ¿Estamos?

M. Estamos.

F. Ahora bien: póngase usted en la primera posibilidad. Supóngase que yo elijo el camino de la revolución. Entonces, puesto que está usted de acuerdo en que ese camino, tomado en serio, conduce a la cárcel, según reza la segunda premisa, es la cárcel lo que me espera. ¿No es así?

M. Así es.

F. Bien. Supongamos ahora, por el contrario, que elige usted el espinoso camino de la integración. Se verá usted condenado a sentir esa insatisfacción consigo mismo que llaman 'mala conciencia'. ¿Conviene usted en esto?

M. Convengo.

F. Pues entonces, mi querido e incoherente interlocutor, no le quedan a usted más que dos caminos: o el régimen penitenciario, o esa especie de trotskismo aplicado a la conciencia moral: el remordimiento permanente.

Formalización del diálogo

1.	$p \leftrightarrow q$	Premisa
2.	$p \rightarrow r$	Premisa
3.	$q \rightarrow s$	Premisa
4.	p	
5.	r	MP, 2, 4
6.	q	
7.	s	MP, 3, 6
8.	$r \leftrightarrow s$	

Pero he aquí que *M*, hasta ahora obediente y sumiso, es también un lógico, solo que infinitamente más solapado que su compañero de argumentación.

M. Permítame. Ha dicho usted que si acepto sus premisas he de aceptar también necesariamente la conclusión que usted propone. Lo cual es tanto como decir que si son verdaderas sus premisas, entonces también será verdadera su conclusión. Lo cual a su vez quiere decir que el condicional construido con esas premisas como antecedente y esa conclusión como consecuente es lógicamente verdadero, o, lo que es lo mismo, verdadero en todos los casos posibles. ¿De acuerdo?

F. De acuerdo.

M. Entonces, con su permiso, voy a construir ese condicional y a hacer su tabla de verdad. Es un poco larga, desde luego. Confío, sin embargo, en que su probada fidelidad a la lógica le ayudará a soportarlo:

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \leftrightarrow s)$$

p	q	r	s	A $p \leftrightarrow q$	B $p \rightarrow r$	C $q \rightarrow s$	$A \wedge B \wedge C$	D $r \leftrightarrow s$	$(A \wedge B \wedge C) \rightarrow D$
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1

¿¡Qué sorpresa, verdad!? No todos los casos de la tabla arrojan el valor 1. Lo cual quiere decir que la expresión no es lógicamente verdadera. Lo cual —puesto que la expresión es un condicional— quiere decir que las premisas no implican la conclusión. Lo cual quiere decir que aquellas pueden perfectamente ser verdaderas y éstas ser falsas. ¿Cierto?

—Cierto— reconoce F con la reconfortante pesadumbre con que todo lógico formal se pliega al inapelable dictamen de su ciencia cuando éste le es adverso.

M. Fíjese unsted, sin embargo, en que, si bien de las premisas que usted ha sentado, y que yo hago mías, no se deduce '$r \leftrightarrow s$', sí se deduce, en cambio, '$r \vee s$'. Si no lo cree, le invito a que haga la tabla de verdad de la expresión '$[(p \leftrightarrow q) \wedge \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$'. Mi pericia —de la que acabo de dar una prueba— en la construcción de tablas de verdad me dispensará a sus ojos —espero— de realizar también esta otra. Confíe en mí. Esa expresión es una tautología. Por lo tanto, la siguiente demostración es una demostración correcta:

1.	$p \leftrightarrow q$	Premisa
2.	$p \rightarrow r$	Premisa
3.	$q \rightarrow s$	Premisa
4.	p	
5.	r	MP, 2, 4
6.	q	
7.	s	MP, 3, 6
8.	$r \vee s$	

Así pues —prosigue *M*—, de sus premisas se sigue una conclusión todavía más pesimista que la prevista por usted; o se va a la cárcel, o se tiene mala conciencia, o *ambas cosas a la vez*. No quisiera, en verdad, encontrarme en el lugar de un individuo que fuera sujeto a la vez del enunciado *r* y del enunciado *s* siendo ambos verdaderos.

¿Cuál es la moraleja —moraleja lógica— de este debate?

Son dos, como hemos anticipado. La primera de ellas viene a poner de relieve la diferencia entre las conclusiones que se alcanzan axiomáticamente y las obtenidas en una de esas deducciones que hemos dado en llamar «naturales». La segunda tiende a resaltar la semejanza de principio entre unas y otras, a mostrar que la diferencia es una diferencia de presentación y a dejar claro que las diferencias de presentación son, en este caso, sumamente importantes.

Vayamos por partes. En primer lugar —y esto es ahora lo más importante a efectos didácticos—, el ejemplo sirve para encarecer la distinción entre un sistema axiomático y un sistema de reglas de inferencia. ¿Qué es lo que hemos demostrado en esta derivación efectuada dentro de un sistema de reglas de inferencia? Hemos demostrado que si es verdad que $p \leftrightarrow q$, y que $p \rightarrow r$ y que $q \rightarrow s$, entonces es verdad que $r \vee s$. Lo que hemos demostrado, por tanto, no es que '$r \vee s$' sea verdadera, sino sólo que lo es *si* lo son las premisas de que hemos partido para llegar a ella. '$r \vee s$' no es una expresión tautológica, verdadera por sí misma, en virtud de su sola forma. Lo que sí es una tautología es la expresión

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s).$$

Por tanto, la diferencia entre un sistema de axiomas y un cálculo de deducción natural es una diferencia en el valor de verdad de las conclusiones a que en uno y otro podemos llegar. El de las conclusiones obtenidas en las demostraciones hechas dentro del primero es siempre el valor verdad. El de las obtenidas en el segundo puede no serlo. En un sistema axiomático como el expuesto en 2, hubiéramos podido obtener[166] una demostración de

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s),$$

que es una tautología y, por ende —en un sistema que sea completo, según veremos en el Epílogo—, un teorema, pero nunca una demostración de '$r \vee s$'.

Hasta aquí, las diferencias.

Señalemos ahora, como anunciábamos, las semejanzas. Porque también podríamos decirle a alguien *a quien sólo le hubiera sido presentada la lógica de enunciados en la forma de un sistema de reglas de inferencia*: «Demuéstrenos que es válido un razonamiento que tenga esta forma

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \leftrightarrow q)] \rightarrow (r \vee s)».$$

[166] A lo largo de un proceso lo suficientemente largo como para que nos lo ahorremos en este momento y lo suficientemente laborioso como para que le aconsejemos al lector que intente desarrollarlo a título de ejercitación en las labores propias del apartado 2 de este capítulo.

Y ese alguien podría decirnos —y haría bien en hacerlo—:

«Demostrar que la expresión que usted propone es formalmente verdadera es tanto como mostrar que de esas premisas —es decir, de la conjunción de enunciados que constituyen el antecedente del condicional con que usted me desafía— se sigue esa conclusión, esa disyunción no excluyente de enunciados. Lo que usted me pide, por tanto, es que demuestre el enunciado conclusión, '$r \vee s$', a partir de esos otros tres. Si muestro que a partir de ellos y aplicando correctamente las reglas de inferencia se sigue esa conclusión habré mostrado que el condicional correspondiente es lógicamente verdadero. Con lo cual habré satisfecho a usted en su demanda».

Volvamos entonces, para que las semejanzas —aun a riesgo de ser tediosos— queden patentes, a la demostración de antes. Puesto que se trataba de una demostración bajo premisas —es decir, una demostración en la que lo enunciado en cada paso sólo es verdadero si son verdaderas las premisas que nos han permitido darlo— indicaremos, en el margen de la izquierda de cada línea y entre paréntesis, el número de la premisa o premisas de cuya verdad depende la del enunciado que figura en esa línea:

(1)	1.	$p \rightarrow r$	Premisa[167]
(2)	2.	$q \rightarrow s$	Premisa[167]
(3)	3.	$p \leftrightarrow q$	Premisa[167]
(3)	4.	p	[168]
(1, 3)	5.	r	MP, 1, 4[169]
(3)	6.	q	[168]
(2, 3)	7.	s	MP, 2, 6
(1, 2, 3)	8.	$r \vee s$	

Ahora bien: decir que cuando una expresión es deducible de otra el condicional formado por ésta como antecedente y la primera como consecuente es lógicamente verdadero equivale a decir que al poner como antecedente de una expresión una de las premisas que han servido para deducirla hemos *eliminado* esa premisa, la hemos convertido en parte de la conclusión. De modo que podríamos dar un paso más y decir:

(1, 2) 9. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$

[167] Es evidente que toda premisa, por el mero hecho de ser tal, no depende, en su verdad, más que de sí misma.

[168] En la línea 3 se afirma la existencia de una alternativa. Hemos de considerar una por una las dos posibilidades que nos presenta.

[169] 'r' solo será verdadera si lo son '$p \rightarrow r$' (Premisa 1) y 'p' (paso 4, que depende a su vez de 3).

Y seguir diciendo:

(1) 10. $(q \rightarrow s) \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)]$
(0) 11. $(p \rightarrow r) \rightarrow \{(q \rightarrow s) \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)]\}$ [170].

La expresión que lleva el número 8 sólo es verdadera si lo son las premisas 1, 2 y 3. La número 9 sólo es si los son las premisas 1 y 2. La 10 sólo es contando con que lo sea la premisa 1. Y la 11 lo es de por sí, bajo cero premisas.

Volvamos sobre todo lo dicho con un nuevo ejemplo. Supóngase que a dos individuos, el primero de los cuales es un coetáneo de Bertrand Russell, muerto en 1921, cuyos conocimientos de lógica se reducen a la lectura atenta y provechosa de los *Principia Mathematica*, mientras que el segundo es un español culto que tiene prohibida toda lectura a excepción de todos los libros de lógica publicados por «Ediciones Ariel» que no sean el de Manuel Sacristán, lo cual hace que sólo conozca los cálculos de deducción natural, se les pide que demuestren que el razonamiento efectuado por un sujeto, mediante el cual éste ha deducido una conclusión de la forma '$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$' a partir de la premisa '$(q \rightarrow r)$', es un razonamiento válido.

El primero de ellos dirá que lo que se le pide, entonces, es que demuestre que

$$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

es una tautología. Y procederá, por ejemplo, así:

1.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$	Axioma 5 de PM
2.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg p \vee r)]$	RS $(p/\neg p)$, 1
3.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	Df. $\rightarrow$, 2 [171]

El segundo, en cambio, dirá tal vez: Tomemos como premisa el antecedente. Ahora bien: el consecuente cuya derivación se me pide es, a su vez, un condicional $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$. Tomemos también como premisa su antecedente $(p \rightarrow q)$. Y, por su parte, el consecuente del consecuente es asimismo un condicional $(p \rightarrow r)$. Supongamos, entonces, a título de premisa, que se da su antecedente.

(1)	1.	$q \rightarrow r$	Premisa
(2)	2.	$p \rightarrow q$	Premisa
(3)	3.	p	Premisa

170 Expresión que, por aplicación sucesiva de la Regla de Importación, se transforma en

$$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \leftrightarrow q)] \rightarrow (r \vee s)$$

171 Cfr. la derivación del teorema 3 en el apartado anterior. No hemos hecho más que repetirla.

Dejemos ahora que la lógica obre por sí misma:

(2, 3)	4.	q	MP, 2, 3
(1, 2, 3)	5.	r	MP, 1, 4 [172]
(1, 2)	6.	$p \rightarrow r$	
(1)	7.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	
(0)	8.	$(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	

Nos queda, sin embargo, antes de presentar el cálculo y comenzar a manejarlo, algo todavía por decir, unos últimos conceptos por precisar.

Hemos dicho que cuando lo que se nos pide es que demostremos —en un cálculo de deducción natural, por supuesto— la expresión, por ejemplo, '$[(p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$', lo que hemos de hacer es tomar como premisas

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

y

2. $p \wedge q$,

demostrar, a continuación, que 'r' se deriva de ellas aplicando correctamente las reglas establecidas, y, finalmente, ir introduciendo como antecedentes de la conclusión obtenida las premisas de que nos hemos servido para obtenerla.

Y hemos dicho que, en cambio, cuando lo que se exige de nosotros es que demostremos que la expresión '$(p \wedge q) \rightarrow r$' se sigue de la premisa '$p \rightarrow (q \rightarrow r)$', lo que se espera es que derivemos esa conclusión de esa sola premisa, de tal modo que la línea —final— de la demostración en que hayamos llegado a '$(p \wedge q) \rightarrow r$' no dependa más que de la línea en que esa única premisa aparece formulada. Así:

(1)	1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	Premisa
(2)	2.	$p \wedge q$	Premisa
(2)	3.	p	[173]
(2)	4.	q	[173]
(1, 2)	5.	$q \rightarrow r$	MP, 1, 3
(1, 2)	6.	r	MP, 4, 5
(1)	7.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	

172 En efecto: si la verdad de lo enunciado en este paso 5 depende de lo enunciado en el paso 1 y de lo enunciado en el paso 4, y lo enunciado en el paso 4 depende de lo enunciado en los pasos 2 y 3, la verdad de lo enunciado en 5 dependerá de lo enunciado en 1, en 2 y en 3.

173 Justificación intuitiva de este paso: si tomamos como línea en una demostración una conjunción de enunciados podemos pasar a afirmar, en otra línea que dependerá de

La línea 7 de esta demostración, en la que aparece la expresión buscada, no depende más que de la línea 1, es decir, de la premisa que se nos ha dado como único punto de partida.

Pero repare el lector en que en nuestra derivación hemos utilizado una premisa más, $(p \wedge q)$, que figura como línea 2. Y repare asimismo en que hemos eliminado esa premisa más tarde. La deducción, en ese sentido, es correcta. Podemos introducir cuantas premisas queramos siempre que luego las eliminemos. A esas premisas que introducimos en el curso de la deducción para luego eliminarlas se les ha llamado a veces «premisas» —o supuestos— auxiliares», a diferencia de las que podríamos llamar «premisas básicas», las que se nos dan al principio y permanecen al final como tales. A éstas últimas pueden añadirse —y para su elección no nos guiamos más que por nuestro sentido táctico al servicio del éxito en la empresa deductiva— otras premisas subsidiarias. Son éstas enunciados que tomamos momentáneamente como dados para derivar de ellos otros enunciados y eliminarlos luego construyendo el condicional correspondiente[174]. He aquí otro ejemplo:

Derívese '$p \rightarrow r$' a partir de '$(p \rightarrow q)$' y '$(q \rightarrow r)$'.

Derivación:

(1)	1.	$p \rightarrow q$	Premisa básica
(2)	2.	$q \rightarrow r$	Premisa básica
(3)	3.	$\neg (p \rightarrow r)$	Premisa auxiliar
(3)	4.	$p \wedge \neg r$	Df. →, 3[175]
(3)	5.	p	
(1,3)	6.	q	MP, 1, 5
(3)	7.	$\neg r$	
(2, 3)	8.	$\neg q$	MT, 2, 7[176]
(1, 2, 3)	9.	$q \wedge \neg q$	[177]
(1, 2)	10.	$\neg (p \rightarrow r) \rightarrow (q \wedge \neg q)$	
(1, 2)	11.	$(p \rightarrow r)$	RA, 10

Bien merece esta demostración que la comentemos en detalle. Los dos primeros pasos no requieren mayor justificación: son las dos premisas

ésta, cualquiera de esos enunciados por separado. Dicho de otro modo: '$(p \wedge q) \rightarrow p$' y '$(p \wedge q) \rightarrow q$' son tautologías.

[174] Veremos muy pronto cómo incluso hay reglas que hacen innecesaria la construcción de este condicional.

[175] En efecto: si $X \rightarrow Y =_{Df.} \neg (X \wedge \neg Y)$, $\neg (X \rightarrow Y) =_{Df.} \neg\neg (X \wedge \neg Y) =_{Df.} (X \wedge \neg Y)$.

[176] Es decir, por aplicación de la regla extraída del *modus tollendo tollens* a '$q \rightarrow r$' y '$\neg r$'.

[177] Esta regla es algo así como el reverso de la explicada en la nota 173: dados dos enunciados (línea 6, línea 8) podemos inferir su conjunción.

que se nos han dado. Pero, ¿y el tercero? El tercer paso ha consistido en tormar momentáneamente como premisa auxiliar, como supuesto provisional, la negación de la conclusión que buscamos. Y partiendo de esta premisa subsidiaria —en unión de las otras dos— hemos llegado —por caminos que hasta ahora sólo hemos justificado de modo informal, pero que pronto estableceremos con precisión— a una contradicción: '$q \wedge \neg q$' en la línea 9. Luego si la suposición de que el enunciado '$\neg (p \rightarrow r)$' es verdadero —y de que, por tanto, es verdadera su conjunción con las restantes premisas— nos conduce a una contradicción, hemos de concluir que ese enunciado es falso, y, por ende, que es verdadera su negación: y su negación es '$(p \rightarrow r)$', el enunciado cuya derivación buscábamos y de este modo hemos hallado. Hemos adoptado una premisa *auxiliar* y, después de un cierto proceso deductivo, la hemos eliminado. Ese proceso —que en esta derivación va de la línea 3 a la línea 11— es una especie de derivación dentro de la derivación, una especie de digresión que consiste en desviarse por un momento del curso principal de la deducción —siguiendo el curso secundario a que nos conduce esa premisa auxiliar— para luego —eliminando esa premisa— volver al camino real. Son diversos los recursos tipográficos de que se han servido los autores para señalar la presencia de estas derivaciones auxiliares incrustadas en la derivación principal. J. M. Anderson y H. W. Johnstone[178] lo representarían así:

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\neg (p \rightarrow r)$
4. $p \wedge \neg r$
5. p
6. q
7. $\neg r$
8. $\neg q$
9. $q \wedge \neg q$

10. $(p \rightarrow r)$,

donde, como es obvio, la raya parte hacia abajo desde la línea en que aparece la premisa auxiliar, flanquea por la izquierda las líneas cuya sucesión compone la deducción secundaria y se desvía en perpendicular hacia la derecha para separar de los pasos obtenidos en esa subderivación el curso principal de la derivación que continúa.

Ésta es la técnica que utilizaremos nosotros a imitación de ellos.

[178] En su obra *Natural Deduction*. Belmont (Calif.), Wadsworth Publishing Company, 1962.

En las deducciones que a partir de este momento efectuaremos aparecerán, por tanto, tres tipos de expresiones:

1. Las premisas básicas, originarias. Llamaremos a esas expresiones «premisas», a secas, y a la derecha de ellas escribiremos, para abreviar, simplemente «P».

2. Las premisas auxiliares. No hará falta escribir nada a su derecha. El trazo tomado de Anderson-Johnstone bastará sin duda para que el lector se percate de que se trata de supuestos adicionales con los que da comienzo una subderivación.

3. Las expresiones que se siguen de cualesquiera expresiones de los tipos 1 y 2 en virtud de reglas de inferencia. En su margen derecho se especificará cuál es la regla de inferencia (o la definición contextual, pues las definiciones contextuales establecen equivalencias y las expresiones equivalentes son intercambiables) a que se ha recurrido y —por medio de la indicación del número de la línea en que aparecen— cuáles son las expresiones que han servido de premisas para dar ese paso.

El cálculo de la deducción natural

Se ha discutido si la silogística aristotélica es un sistema de leyes o más bien un sistema de deducción natural[179]. Por respecto a los megárico-estoicos no hay, en cambio, duda alguna: en ellos —y, señaladamente, en Crisipo de Soles, el más importante de los lógicos de esa escuela— la lógica (de enunciados) aparece presentada en la forma de sistema de reglas de inferencia[180]. Así pues, ya incluso en los orígenes de nuestra ciencia se daba esa alternancia entre ambas formas de presentación. Reglas de inferencia eran también las *consequentiae* de los medievales[181]. Por lo que se refiere a la lógica contemporánea, puede decirse que desde

[179] Cfr., por ejemplo, J. Sanmartín, «Silogística, lógica polivalente y teoría de modelos», *Teorema*, vol III/2-3 (1973), págs. 355 y ss. Como trabajos representativos de ambas interpretaciones, véanse, de una parte, J. Lukasiewicz, *Aristotle's Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford, Clarendon Press, 1951; 2.ª ed. (aumentada), 1957. *La silogística de Aristóteles*. Tr. de J. Fernández Robles revisada por M. Garrido. Madrid, Ed. Tecnos, 1970; y, de otra parte, J. Corcoran, «Aristotle's Natural Deduction Systems». En J. Corcoran (ed.), *Ancient Logic and Its Modern Interpretations*. Dordrecht, D. Reidel Publ. Co., 1974, págs. 85 y ss.

[180] Cfr., por ejemplo, W. y M. Kneale, *The Development of Logic*. Oxford, Clarendon Press, 1961; reimpr. con correc. en 1964, 1966 y 1968. *El desarrollo de la lógica*. Tr. de J. Muguerza. Madrid, Ed. Tecnos, 1972; cap. III.

[181] Como, por ejemplo, la que enuncia Pedro Hispano en sus *Summulae* diciendo: «*Arguendo a tota copulativa ad veritatem cuiuslibet partis eius seorsum, est bona consequentia*». Se trata de una regla que hoy enunciaríamos así: «Si tomamos como premisa una conjunción de enunciados, podemos inferir como conclusión cualquiera de ellos por separado».

Frege[182] hasta 1934, y sin duda como consecuencia del influjo de la matemática, se impuso la presentación axiomática de la lógica: vale decir, la presentación de la lógica como sistema de leyes o tesis. Es en 1934 cuando Gentzen[183] y Jaskowski[184] presentan, por separado, lo que Gentzen llama «un sistema de inferencia natural».

El sistema de Gentzen se basaba, para la lógica de enunciados, en ocho reglas. Recordemos, en efecto, que con la negación, la conjunción, la disyunción y el condicional bastaba —y, en rigor, sobraba— para definir las restantes funciones de enunciados, así monádicas como diádicas. Pues bien: por cada una de esas cuatro conectivas fundamentales Gentzen nos ofrece dos reglas. La primera de ellas será una *regla de introducción* de la conectiva de que se trate. La segunda, una *regla de eliminación* de ésta. ¿Por qué estos nombres? Porque la regla de introducción de la disyunción, por ejemplo, nos permite pasar de unas premisas en que esa conectiva no aparece a una conclusión construida con esa conectiva. Por otra parte, si hay una regla mediante cuya aplicación podemos derivar una expresión disyuntiva a partir de unas premisas en las que no figura el functor disyunción (al menos a título de conectiva fundamental) diremos que esa regla es una regla de introducción de la disyunción.

Reglas primitivas del cálculo de enunciados

Regla de introducción de la negación:

(RI ¬)

$$\begin{array}{|l} X \\ \hline Y \land \neg Y \end{array}$$

$$\frac{}{\neg X}$$

Regla de eliminación de la negación:

(RE ¬)

$$\frac{\neg\neg X}{X}$$

[182] En su obra *Begriffsschrift*. Halle, Nebert, 1879. Reimpr.: I. Angelelli (ed.) *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hildesheim, G. Olms, 1964. *Conceptografía*. V. esp. (en un volumen que contiene otros escritos del autor) de H. Padilla. Méjico, UNAM, 1972.

[183] G. Gentzen: «Untersuchungen über das logische Schliessen». *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39 (1934), págs. 176-210 y 405-13. Hay anunciada versión castellana en la revista *Teorema*.

[184] S. Jaskowski: «On the Rules of Suppositions in Formal Logic». *Studia Logica*, 1 (1934), págs. 5-32. V. cast. en A. Deaño (ed.), *Lecturas de lógica formal*, Madrid, Alianza Ed. (en prensa).

Regla de introducción de la disyunción:

(RI ∨)

$$\frac{X}{X \lor Y} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{Y}{X \lor Y}$$

Regla de eliminación de la disyunción:

(RE ∨)

$$\begin{array}{l} X \lor Y \\ \left[\begin{array}{l} X \\ Z \end{array}\right. \\ \qquad \left[\begin{array}{l} Y \\ Z \end{array}\right. \\ \hline Z \end{array}$$

Regla de introducción de la conjunción:

(RI ∧)

$$\frac{\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}}{X \land Y} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}}{Y \land X}$$

Regla de eliminación de la conjunción:

(RE ∧)

$$\frac{X \land Y}{X} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{X \land Y}{Y}$$

Regla de introducción del condicional:

(RI →)

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} X \\ Y \end{array}\right. \\ \hline X \to Y \end{array}$$

Regla de eliminación del condicional:

(RE →)

$$\frac{\begin{array}{l} X \to Y \\ X \end{array}}{Y}$$

No estará tal vez de más un pequeño comentario a propósito de cada una de estas reglas:

RI ¬. Lo que con esta regla viene a decirnos la lógica es que cuando de una hipótesis (representada en este caso por X) se siguen consecuencias contradictorias (como las representadas por la expresión '$Y \land \neg Y$'), entonces podemos inferir que esa hipótesis es falsa. No es nuevo, evidentemente, esto que decimos: aunque sólo de modo intuitivo, hemos utilizado esta regla repetidas veces. Se la podría llamar también, como hemos hecho nosotros antes, «Regla de reducción al absurdo».

RE ¬. Esta regla, también llamada de la doble negación, autoriza el paso de cualquier expresión doblemente negada a su afirmación. Es lo que ordinariamente se quiere decir al señalar que dos negaciones afirman. En definitiva, mediante la sucesiva aplicación de esta regla, podemos reducir el número de negaciones que preceden a una expresión a uno de estos dos casos: o una o ninguna. En general, si ese número es par, por sucesivas aplicaciones de esta regla, nos quedaremos sin ninguna negación, mientras que si ese número es impar, nos quedaremos con una.

RI ∨. Puesto que una disyunción —no excluyente, como ésta— es verdadera con sólo que lo sea uno de sus miembros, es claro que si tomamos un enunciado como premisa podemos inferir como conclusión la disyunción de ese enunciado con cualquier otro, sea cual fuere el valor de verdad de éste. Es decir, que si, por ejemplo, partimos de que es verdadero el enunciado

> la filosofía escrita por Stalin supone una regresión con respecto a Descartes,

podemos inferir el enunciado —disyunción del enunciado anterior con uno nuevo—,

> o la filosofía escrita por Stalin supone una regresión con respecto a Descartes o la escrita por Rosenberg supone el retorno al paleolítico inferior[185].

De hecho, y como en el caso de la regla anterior, la proposición nueva que se introduce en disyunción no se elige arbitrariamente, sino en virtud de los interesas de la derivación.

[185] O ambas cosas a la vez.

RE $\vee$. Las aplicaciones intuitivas que de esta regla hemos hecho hacen casi que huelgue todo otro comentario. Presentadas dos alternativas[186], si afirmamos que de la primera se sigue lo expresado por un determinado enunciado, y otro cierto enunciado se sigue de lo expresado por la segunda, podemos inferir la disyunción de esos dos enunciados que se siguen respectivamente de los miembros de la alternativa.

RI $\wedge$. Si tenemos en una línea cualquiera de una derivación el enunciado *p*, y en otra línea el enunciado *q*, podemos pasar en una tercera línea a la conjunción de esos dos enunciados. Puesto que estamos dándolos por verdaderos, su conjunción lo será también.

Del mismo modo que la implicación de una conclusión por un conjunto de premisas puede representarse, descendiendo desde el metalenguaje al lenguaje, mediante un condicional —que será, entonces, formalmente verdadero—, así también, de modo parecido, la enumeración sucesiva de premisas puede traducirse en una conjunción de éstas.

RE $\wedge$. El comentario en torno a esta regla es simétrico al suscitado por la regla anterior. Tomada como verdadera una conjunción, podemos pasar a la afirmación aislada de uno cualquiera de sus componentes.

La aplicación sucesiva e ininterrumpida de esta regla de eliminación de la conjunción y de la introducción de esta misma conectiva permitiría, a los partidarios del pensamiento obsesivo, emprender una deducción infinita, en la que las conclusiones se fueran sucediendo sin aportar ninguna de ellas grandes novedades. Por ejemplo:

	Esquema de derivación	
1. Hemos de seguir las directrices del Presidente Mao-Tse-Tung.	1. p	
2. Las directrices del Presidente Mao-Tse-Tung están mal traducidas.	2. q	
3. Hemos de seguir las directrices del Presidente Mao-Tse-Tung y las directrices del Presidente Mao-Tse-Tung están mal traducidas.	3. $p \wedge q$	RI $\wedge$, 1, 2
4. Hemos de seguir las directrices del Presidente Mao-Tse-Tung.	4. p	RE $\wedge$, 3
5. Las directrices del Presidente Mao-Tse-Tung están mal traducidas.	5. q	RE $\wedge$, 3

Y así sucesivamente.

RI $\rightarrow$. Esta regla requiere algunas observaciones. Lo que viene a decirnos es que si de un enunciado se sigue otro, entonces podemos unirlos mediante un condicional. La cosa, sin embargo, tiene mucha más enjundia. Por una parte, en efecto, esta regla desempeña un papel central en la deducción: cada vez que se nos pida que derivemos como conclusión una expresión que tiene la forma de un condicional, nuestra estrategia consistirá en tomar como premisa auxiliar el antecedente de dicho condicional; si al hacerlo así conseguimos (con la ayuda de las premisas básicas, iniciales) derivar el consecuente, podremos unir ambos mediante el condicional y obtener así la expresión buscada. Pongamos el que probablemente es el ejemplo más sencillo. Supóngase que se nos pide que derivemos '$p \rightarrow r$' a partir de las premisas '$p \rightarrow q$' y '$q \rightarrow r$'. Comenzaremos, como es natural, sentando estas premisas:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$q \rightarrow r$	P

¿Qué hacer ahora? La conclusión que hemos de obtener tiene la forma de condicional. Disponiendo de la regla que estamos comentando podemos tomar como premisa auxiliar el antecedente de la expresión buscada, por ver si asumiendo esa premisa —en unión de las premisas iniciales— podemos llegar a *r*. Si así fuera, estaríamos autorizados a introducir el condicional entre *p* y *r* y habríamos resuelto el problema. La derivación sería ésta:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$q \rightarrow r$	P
3.	p	
4.	q	RE $\rightarrow$, 1, 3
5.	r	RE $\rightarrow$, 2, 4
6.	$p \rightarrow r$	RI $\rightarrow$, 3-5

Por otra parte, y como se recordará, páginas atrás hemos utilizado intuitivamente esta regla a modo de lo que podríamos llamar «Regla de descarga de premisas».

Por lo demás, la RI $\rightarrow$ desempeña un papel decisivo en la lógica. En efecto: en lógica se habla, desde Herbrand, del llamado «*Teorema de Deducción*», el cual nos dice que si en el cálculo existe una demostración del enunciado *Y* a partir del enunciado *X* (posiblemente junto con otros enunciados), entonces existe también en él una demostración de la fórmula '$X \rightarrow Y$'. En menos palabras: si hemos demostrado que de *X* se sigue *Y*, podemos dar por demostrado que $X \rightarrow Y$. Utilizando el ejemplo anterior: si hemos demostrado que *r* se sigue de *p* junto con las premisas '$p \rightarrow q$'

[186] Y por esto es irrelevante que la disyunción de partida sea excluyente —como en el caso de nuestro ejemplo de la cárcel y la mala conciencia— o no excluyente, como aquí.

y '$q \rightarrow r$', hemos demostrado que de estas dos premisas se sigue la expresión '$p \rightarrow r$'.

Es obvia la importancia de esta regla para el establecimiento de la conexión entre los sistemas axiomáticos y los sistemas de reglas de inferencia, y con ese fin la hemos utilizado nosotros en páginas anteriores. La existencia de esta regla hace posible afirmar la equivalencia entre un sistema de leyes y el correspondiente sistema de reglas. Así, en el sistema de leyes que nosotros hemos presentado —el sistema axiomático de *Principia Mathematica* para la lógica de enunciados— podíamos derivar como teorema la expresión '$[(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$'. En nuestro sistema de reglas de inferencia podemos derivar '$p \rightarrow r$' a partir de '$p \rightarrow q$' y '$q \rightarrow r$', y luego, merced a esta Regla de Introducción del Condicional, podemos ir descargando premisas hasta obtener como línea última de la derivación la expresión entera.

RE $\rightarrow$. Esta otra regla, en cambio, apenas necesita presentación. La hemos conocido como Regla de Separación en el sistema axiomático de PM. La hemos aplicado justificándola intuitivamente. Sabemos que es una versión metalingüística de la ley llamada *modus ponendo ponens*. Y, por lo demás, con ella no hacemos sino explicitar las propiedades del condicional.

Procederemos a continuación a presentar una serie de reglas de inferencia derivadas. Se llaman «derivadas», obviamente, porque las introducimos derivándolas de las reglas básicas o primitivas. Y las introducimos porque merced a ellas muchas derivaciones se hacen más breves y sencillas. Conviene tener presente, sin embargo, que desde el punto de vista teórico bastaría con las ocho reglas que acabamos de enumerar. Sólo razones prácticas nos hacen, pues, agregar a éstas aquellas otras.

El criterio de que nos valemos para escoger esas y no otras reglas derivadas es simplemente el de la frecuencia con que, en función de su capacidad para abreviar las deducciones, vemos aconsejable el recurso a ellas.

Iremos presentándolas por grupos. Y los grupos los formaremos en torno a cada conectiva: reuniendo aquellas reglas cuya validez proviene de que no son más que el desarrollo del sentido de esa conectiva. Empezaremos por el condicional. A la derecha de cada regla presentaremos el proceso mediante el cual se fundamenta en —se deriva de— las reglas primitivas (o en reglas derivadas expuestas con anterioridad).

Regla de transitividad del condicional[187]

(RTr$\rightarrow$)

$X \rightarrow Y$
$Y \rightarrow Z$
―――――
$X \rightarrow Z$

Derivación

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$Y \rightarrow Z$	P
3.	X	
4.	Y	RE $\rightarrow$, 1, 3
5.	Z	RE $\rightarrow$, 2, 4
6.	$X \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$, 3-5

Regla del modus tollens

(MT)

$X \rightarrow Y$
$\neg Y$
―――――
$\neg X$

Derivación

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	X	
4.	Y	RE $\rightarrow$, 1, 3
5.	$Y \wedge \neg Y$	RI $\wedge$, 2, 4
6.	$\neg X$	RI $\neg$, 3-5

Regla de importanción

(RImp)

$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$
―――――
$(X \wedge Y) \rightarrow Z$

Derivación

1.	$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$	P
2.	$X \wedge Y$	
3.	X	RE $\wedge$, 2
4.	$Y \rightarrow Z$	RE $\rightarrow$, 1, 3
5.	Y	RE $\wedge$, 2
6.	Z	RE $\rightarrow$, 4, 5
7.	$(X \wedge Y) \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$, 2-6

[187] Se dice —digamos por ahora— que una relación es trasitiva cuando si se da entre un individuo *x* y un individuo *y*, y entre ese individuo *y* y un individuo *z*, se da también necesariamente entre *x* y *z*. La relación condicional es una relación transitiva entre enunciados.

Regla de exportación
(RExp)

$$\frac{(X \wedge Y) \rightarrow Z}{X \rightarrow (Y \rightarrow Z)}$$

Derivación

1.	$(X \wedge Y) \rightarrow Z$	P
2.	X	
3.	Y	
4.	$X \wedge Y$	RI $\wedge$, 2, 3
5.	Z	RE $\rightarrow$, 1, 4
6.	$Y \rightarrow Z$	RI $\rightarrow$, 3-5
7.	$X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$	RI $\rightarrow$, 2-6[188]

Regla de contraposición del condicional
(RContr $\rightarrow$)

$$\frac{X \rightarrow Y}{\neg Y \rightarrow \neg X}$$

Derivación

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	
3.	$\neg X$	MT, 1, 2
4.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	RI $\rightarrow$, 2-3[189]

O bien

$$\frac{\neg Y \rightarrow \neg X}{X \rightarrow Y}$$

Derivación

1.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	P
2.	X	
3.	$\neg\neg Y$	MT, 1, 2
4.	Y	RE $\neg$, 3
5.	$X \rightarrow Y$	RI $\rightarrow$, 2-4

[188] He aquí el caso de una derivación en cuyo seno tiene lugar una subderivación que parte de la premisa auxiliar X, subderivación en la que a su vez está incrustada una nueva subderivación, la que comienza con Y.

[189] Con ayuda de esta regla es posible derivar la regla del *modus ponens* (RE $\rightarrow$) a partir de la regla del *modus tollens* y viceversa. En efecto:

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	X	P
3.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	RContr $\rightarrow$, 1
4.	Y	MT, 2, 3

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	RContr $\rightarrow$, 1
4.	$\neg X$	RE $\rightarrow$, 2, 3

Regla de reflexividad del condicional[190]
(RRfl $\rightarrow$)

$$\frac{X}{X}$$

Derivación

1.	X	P
2.	$\neg X$	
3.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$, 1, 2
4.	X	RI $\neg$, 2-3

Regla de conmutatividad de la conjunción
(RConm $\wedge$)

$$\frac{X \wedge Y}{Y \wedge X}$$

Derivación

1.	$X \wedge Y$	P
2.	X	RE $\wedge$, 1
3.	Y	RE $\wedge$, 1
4.	$Y \wedge X$	RI $\wedge$, 2, 3

Regla de idempotencia de la conjunción
(RIdem $\wedge$)

$$\frac{X \wedge X}{X}$$

Derivación

1.	$X \wedge X$	P
2.	X	RE $\wedge$, 1

Regla de conmutatividad de la disyunción
(RConm $\vee$)

$$\frac{X \vee Y}{Y \vee X}$$

Derivación

1.	$X \vee Y$	P
2.	X	
3.	$Y \vee X$	RI $\vee$, 2
4.	Y	
5.	$Y \vee X$	RI $\vee$, 4
6.	$Y \vee X$	RE $\vee$, 1-5

[190] Se dice que una relación es reflexiva cuando toda entidad mantiene esa relación consigo misma (como es el caso, por ejemplo, de la relación 'idéntico a'). La relación condicional es reflexiva, porque todo enunciado es condición suficiente de sí mismo.

Regla de idempotencia de la disyunción
(RIdem $\vee$)

Esquema	Derivación		
$X \vee X$	1.	$X \vee X$	P
——	2.	X	
X	3.	X	RRfl $\rightarrow$, 2
	4.	X	
	5.	X	RRfl $\rightarrow$, 4
	6.	X	RE $\vee$, 1-5

Regla (primera) de inferencia de la alternativa
(RIA_1)

Esquema	Derivación		
$X \vee Y$	1.	$X \vee Y$	P
$\neg X$	2.	$\neg X$	P
——	3.	$\neg X \rightarrow Y$	Df $\vee$, 1
Y	4.	Y	RE $\rightarrow$, 2, 3

Regla (segunda) de inferencia de la alternativa
(RIA_2)

Esquema	Derivación		
$X \vee Y$	1.	$X \vee Y$	P
$\neg Y$	2.	$\neg Y$	P
——	3.	$\neg X$	
X	4.	$\neg X \rightarrow Y$	Df $\vee$, 1
	5.	Y	RE $\rightarrow$, 3, 4
	6.	$Y \wedge \neg Y$	RI $\wedge$, 2, 5
	7.	X	RI $\neg$, 3-6

Regla (primera) del dilema constructivo [191]
(RDC_1)

Esquema	Derivación		
$X \vee Y$	1.	$X \vee Y$	P
$X \rightarrow Z$	2.	$X \rightarrow Z$	P
$Y \rightarrow Z$	3.	$Y \rightarrow Z$	P
——	4.	X	
Z	5.	Z	RE $\rightarrow$, 2, 4
	6.	Y	
	7.	Z	RE $\rightarrow$, 3, 6
	8.	Z	RE $\vee$, 1-7

[191] No se piense que esta regla es la misma que la regla —básica— de eliminación de la disyunción. Por el contrario: la RE $\vee$ es el fundamento de ésta otra.

Regla (segunda) del dilema constructivo
(RDC_2)

Esquema	Derivación		
$X \vee Y$	1.	$X \vee Y$	P
$X \rightarrow Z$	2.	$X \rightarrow Z$	P
$Y \rightarrow W$	3.	$Y \rightarrow W$	P
——	4.	X	
$Z \vee W$	5.	Z	RE $\rightarrow$, 2, 4
	6.	$Z \vee W$	RI $\vee$, 5
	7.	Y	
	8.	W	RE $\rightarrow$, 3, 7
	9.	$Z \vee W$	RI $\vee$, 8
	10.	$Z \vee W$	RE $\vee$, 1-9

Regla (primera) del dilema destructivo
(RDD_1)

Esquema	Derivación		
$\neg X \vee \neg Y$	1.	$\neg X \vee \neg Y$	P
$Z \rightarrow X$	2.	$Z \rightarrow X$	P
$Z \rightarrow Y$	3.	$Z \rightarrow Y$	P
——	4.	$\neg X$	
$\neg Z$	5.	$\neg Z$	MT, 2, 4
	6.	$\neg Y$	
	7.	$\neg Z$	MT, 3, 6
	8.	$\neg Z$	RE $\vee$, 1-7

Regla (segunda) del dilema destructivo
(RDD_2)

Esquema	Derivación		
$\neg X \vee \neg Y$	1.	$\neg X \vee \neg Y$	P
$Z \rightarrow X$	2.	$Z \rightarrow X$	P
$W \rightarrow Y$	3.	$W \rightarrow Y$	P
——	4.	$\neg X$	
$\neg Z \vee \neg W$	5.	$\neg Z$	MT, 2, 4
	6.	$\neg Z \vee \neg W$	RI $\vee$, 5
	7.	$\neg Y$	
	8.	$\neg W$	MT, 3, 7
	9.	$\neg Z \vee \neg W$	RI $\vee$, 8
	10.	$\neg Z \vee \neg W$	RE $\vee$, 1-9

Regla de distribución de la conjunción por la disyunción
(RDstr ∧ por ∨)

Derivación

$$\frac{X \wedge (Y \vee Z)}{(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)}$$

1.	$X \wedge (Y \vee Z)$	P
2.	X	RE ∧, 1
3.	$Y \vee Z$	RE ∧, 1
4.	Y	
5.	$X \wedge Y$	RI ∧, 2, 4
6.	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	RI ∨, 5
7.	Z	
8.	$X \wedge Z$	RI ∧, 2, 7
9.	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	RI ∨, 8
10.	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	RE ∨, 1-9

Regla de distribución de la disyunción por la conjunción
(RDstr ∨ por ∧)

Derivación

$$\frac{X \vee (Y \wedge Z)}{(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)}$$

1.	$X \vee (Y \wedge Z)$	P
2.	X	
3.	$X \vee Y$	RI ∨, 2
4.	$X \vee Z$	RI ∨, 2
5.	$(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	RI ∧, 3, 4
6.	$Y \wedge Z$	
7.	Y	RE ∧, 6
8.	Z	RE ∧, 6
9.	$X \vee Y$	RI ∨, 7
10.	$X \vee Z$	RI ∨, 8
11.	$(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	RI ∧, 9, 10
12.	$(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$	RE ∨, 1-11

Regla de introducción del bicondicional
(RI ↔)

Derivación

$$\frac{X \rightarrow Y \quad Y \rightarrow X}{X \leftrightarrow Y}$$

1.	$X \rightarrow Y$	P
2.	$Y \rightarrow X$	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	RI ∧, 1, 2
4.	$X \leftrightarrow Y$	Df↔, 3

Regla de debilitación del bicondicional
(RD ↔)

$$\frac{X \leftrightarrow Y}{X \rightarrow Y} \quad \text{o bien} \quad \frac{X \leftrightarrow Y}{Y \rightarrow X}$$

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df↔, 1
3.	$X \rightarrow Y$	RE ∧, 2
	o bien:	
3.	$Y \rightarrow X$	RE ∧, 2

Regla (primera) de eliminación del bicondicional
(RE ↔, 1)

Derivación

$$\frac{X \leftrightarrow Y \quad X}{Y}$$

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	X	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df↔, 1
4.	$X \rightarrow Y$	RE ∧, 3
5.	Y	RE →, 2, 4

Regla (segunda) de eliminación del bicondicional
(RE ↔, 2)

Derivación

$$\frac{X \leftrightarrow Y \quad \neg Y}{\neg X}$$

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	$\neg Y$	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df↔, 1
4.	$X \rightarrow Y$	RE ∧, 3
5.	$\neg X$	MT, 2, 4

Regla (tercera) de eliminación del bicondicional
(RE ↔, 3)

Derivación

$$\frac{X \leftrightarrow Y \quad Y}{X}$$

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	Y	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df↔, 1
4.	$Y \rightarrow X$	RE ∧, 3
5.	X	RE →, 2, 4

Regla (cuarta) de eliminación del bicondicional
(RE ↔, 4)

Derivación

$$\frac{X \leftrightarrow Y \quad \neg X}{\neg Y}$$

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	$\neg X$	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df↔, 1
4.	$Y \rightarrow X$	RE ∧, 3
5.	$\neg Y$	MT, 2, 4

Regla de transitividad del bicondicional
(RTr $\leftrightarrow$)

$X \leftrightarrow Y$
$Y \leftrightarrow Z$
―――――
$X \leftrightarrow Z$

Derivación

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	$Y \leftrightarrow Z$	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df $\leftrightarrow$, 1
4.	$X \rightarrow Y$	RE $\wedge$, 3
5.	$Y \rightarrow X$	RE $\wedge$, 3
6.	$(Y \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow Y)$	Df $\leftrightarrow$, 2
7.	$Y \rightarrow Z$	RE $\wedge$, 6
8.	$Z \rightarrow Y$	RE $\wedge$, 6
9.	$X \rightarrow Z$	RTr $\rightarrow$, 4, 7
10.	$Z \rightarrow X$	RTr $\rightarrow$, 8, 5
11.	$X \leftrightarrow Z$	RI $\leftrightarrow$, 9, 10

Regla de introducción de la doble negación
(RI $\neg\neg$)

X
―――――
$\neg\neg X$

Derivación

1.	X	P
2.	$\neg X$	
3.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$, 1, 2
4.	$\neg\neg X$	RI $\neg$, 2-3

Regla *ex contradictione quodlibet* (Ecq)

(REcq)

$X \wedge \neg X$
―――――
Y

Derivación

1.	$X \wedge \neg X$	P
2.	$\neg Y$	
3.	$\neg X$	RE $\wedge$, 1
4.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	RI $\rightarrow$, 2, 3
5.	$X \rightarrow Y$	RContr., 4
6.	X	RE $\wedge$, 1
7.	Y	RE $\rightarrow$, 5, 6

RE $\neg$. De lo falso —decían los mejores lógicos de la Baja Edad Media— se sigue cualquier cosa. En efecto: un condicional con antecedente falso es siempre verdadero, sea cual fuere el valor de verdad del consecuente. Por tanto, si tomamos una contradicción —falsa por principio— como premisa, podemos inferir cualquier enunciado como conclusión.

Llevada demasiado lejos, esta regla introduciría en el sistema una especie de libertarismo deductivo. Podría deducirse casi todo. Para alcanzar una conclusión bastaría con derivar de las premisas una contradicción y escribir a renglón seguido de ésta la expresión buscada. La regla,

sin embargo, ha de entenderse en un sentido más restringido. De hecho, sólo se aplicará en el seno de una subderivación. Se aplicará, por ejemplo, para, cuando partiendo de una premisa auxiliar hayamos llegado a una contradicción, derivar de ello la negación de esa premisa auxiliar. Como hemos hecho nosotros en nuestra derivación de '$p \rightarrow r$' a partir de '$p \rightarrow q$' y '$q \rightarrow r$'.

Algunos autores —en un útil alarde de cierta informalidad— recogen todas las (posibles) reglas derivadas en una única regla —que Benson Mates, por ejemplo[192], llama «de inferencia tautológica»— que permite escribir en una línea de una derivación una expresión que se infiere tautológicamente de alguna o algunas líneas escritas con anterioridad. Decir que se infiere tautológicamente es tanto como decir que el condicional formado por una línea de esa forma (o por unas líneas de esa forma unidas en conjunción) como antecedente y una conclusión de esa forma como consecuente es formalmente verdadero —cosa que siempre se podrá comprobar mediante la oportuna tabla de verdad—. Una regla como ésta tiene el inconveniente de su escasa pulcritud formalista. La brevedad que introduce en las deducciones —tanto mayor estadísticamente cuanto mayor es la familiaridad del sujeto deductor con los enunciados de la lógica, es decir, cuanto mayor es el número de tautologías de que el sujeto tiene noticia— constituye su mayor ventaja. Siempre que, para evitar prolijidades, acudamos a esta regla lo haremos mediante las siglas «IT» y lo comentaremos en nota.

4. Epílogo

Acabamos de iniciarnos en la lógica de enunciados. Primero, de una manera punto menos que intuitiva. Más tarde, exponiéndola en la forma de cálculo axiomático. Finalmente, presentándola a modo de sistema de reglas de inferencia. Que estas dos formas de presentación son equivalentes es algo que, por explicado y repetido, no necesita ya ahora más que una breve evocación. Se exponga como sistema axiomático o como cálculo de deducción natural, la lógica de enunciados es la misma. Al decir que es la misma queremos significar que en ambos casos tiene el mismo rendimiento. Y al decir que en ambos casos tiene el mismo rendimiento venimos a señalar que, sea cual fuere la forma que se le dé, su poder de análisis formal de la validez de las inferencias entre enunciados sin analizar tendrá siempre el mismo alcance. Ese poder no es otro que el de identificar como formalmente válidos aquellos razonamientos en los que la conclusión se siga necesariamente de las

[192] En su *Elementary Logic*, Oxford University Press, 1965. *Lógica matemática elemental*, V. cast. de Aurora García Trevijano, Madrid, Tecnos, 1970.

Regla de transitividad del bicondicional
(RTr $\leftrightarrow$)

$$\frac{X \leftrightarrow Y \qquad Y \leftrightarrow Z}{X \leftrightarrow Z}$$

Derivación

1.	$X \leftrightarrow Y$	P
2.	$Y \leftrightarrow Z$	P
3.	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$	Df $\leftrightarrow$, 1
4.	$X \rightarrow Y$	RE $\wedge$, 3
5.	$Y \rightarrow X$	RE $\wedge$, 3
6.	$(Y \rightarrow Z) \wedge (Z \rightarrow Y)$	Df $\leftrightarrow$, 2
7.	$Y \rightarrow Z$	RE $\wedge$, 6
8.	$Z \rightarrow Y$	RE $\wedge$, 6
9.	$X \rightarrow Z$	RTr $\rightarrow$, 4, 7
10.	$Z \rightarrow X$	RTr $\rightarrow$, 8, 5
11.	$X \leftrightarrow Z$	RI $\leftrightarrow$, 9, 10

Regla de introducción de la doble negación
(RI $\neg\neg$)

$$\frac{X}{\neg\neg X}$$

Derivación

1.	X	P
┌ 2.	$\neg X$	
│ 3.	$X \wedge \neg X$	RI $\wedge$, 1, 2
4.	$\neg\neg X$	RI $\neg$, 2-3

Regla *ex contradictione quodlibet* (Ecq)

(REcq)

$$\frac{X \wedge \neg X}{Y}$$

Derivación

1.	$X \wedge \neg X$	P
┌ 2.	$\neg Y$	
│ 3.	$\neg X$	RE $\wedge$, 1
4.	$\neg Y \rightarrow \neg X$	RI $\rightarrow$, 2, 3
5.	$X \rightarrow Y$	RContr., 4
6.	X	RE $\wedge$, 1
7.	Y	RE $\rightarrow$, 5, 6

RE $\neg$. De lo falso —decían los mejores lógicos de la Baja Edad Media— se sigue cualquier cosa. En efecto: un condicional con antecedente falso es siempre verdadero, sea cual fuere el valor de verdad del consecuente. Por tanto, si tomamos una contradicción —falsa por principio— como premisa, podemos inferir cualquier enunciado como conclusión.

Llevada demasiado lejos, esta regla introduciría en el sistema una especie de libertarismo deductivo. Podría deducirse casi todo. Para alcanzar una conclusión bastaría con derivar de las premisas una contradicción y escribir a renglón seguido de ésta la expresión buscada. La regla,

sin embargo, ha de entenderse en un sentido más restringido. De hecho, sólo se aplicará en el seno de una subderivación. Se aplicará, por ejemplo, para, cuando partiendo de una premisa auxiliar hayamos llegado a una contradicción, derivar de ello la negación de esa premisa auxiliar. Como hemos hecho nosotros en nuestra derivación de '$p \rightarrow r$' a partir de '$p \rightarrow q$' y '$q \rightarrow r$'.

Algunos autores —en un útil alarde de cierta informalidad— recogen todas las (posibles) reglas derivadas en una única regla —que Benson Mates, por ejemplo[192], llama «de inferencia tautológica»— que permite escribir en una línea de una derivación una expresión que se infiere tautológicamente de alguna o algunas líneas escritas con anterioridad. Decir que se infiere tautológicamente es tanto como decir que el condicional formado por una línea de esa forma (o por unas líneas de esa forma unidas en conjunción) como antecedente y una conclusión de esa forma como consecuente es formalmente verdadero —cosa que siempre se podrá comprobar mediante la oportuna tabla de verdad—. Una regla como ésta tiene el inconveniente de su escasa pulcritud formalista. La brevedad que introduce en las deducciones —tanto mayor estadísticamente cuanto mayor es la familiaridad del sujeto deductor con los enunciados de la lógica, es decir, cuanto mayor es el número de tautologías de que el sujeto tiene noticia— constituye su mayor ventaja. Siempre que, para evitar prolijidades, acudamos a esta regla lo haremos mediante las siglas «IT» y lo comentaremos en nota.

4. Epílogo

Acabamos de iniciarnos en la lógica de enunciados. Primero, de una manera punto menos que intuitiva. Más tarde, exponiéndola en la forma de cálculo axiomático. Finalmente, presentándola a modo de sistema de reglas de inferencia. Que estas dos formas de presentación son equivalentes es algo que, por explicado y repetido, no necesita ya ahora más que una breve evocación. Se exponga como sistema axiomático o como cálculo de deducción natural, la lógica de enunciados es la misma. Al decir que es la misma queremos significar que en ambos casos tiene el mismo rendimiento. Y al decir que en ambos casos tiene el mismo rendimiento venimos a señalar que, sea cual fuere la forma que se le dé, su poder de análisis formal de la validez de las inferencias entre enunciados sin analizar tendrá siempre el mismo alcance. Ese poder no es otro que el de identificar como formalmente válidos aquellos razonamientos en los que la conclusión se siga necesariamente de las

[192] En su *Elementary Logic*. Oxford University Press, 1965. *Lógica matemática elemental*. T. cast. de Aurora García Trevijano, Madrid, Tecnos, 1970.

premisas y el de detectar como no válidos aquellos otros en los que esto no ocurra. Así pues, presentar la lógica de enunciados como sistema axiomático supone encontrar un conjunto de axiomas lo suficientemente fértil como para dar de sí *todos* y *sólo* los enunciados verdaderos construibles combinando los símbolos primitivos del cálculo mediante las reglas de formación. Y si de presentarla como cálculo de deducción natural se trata, hemos de procurarnos un repertorio de reglas de inferencia que permitan obtener *todas* y *sólo* las consecuencias que válidamente se siguen de las premisas de que se trate.

Todas, y *sólo*. Hemos tocado fondo. La exigencia de que en un cálculo sólo puedan ser obtenidos por derivación los enunciados verdaderos construibles con sus símbolos es la exigencia de que ese cálculo sea *consistente*. La exigencia de que en él sea posible deducir *todos* los enunciados verdaderos relativos a la teoría que con ese cálculo se prentende formalizar —esto es, la exigencia de que no haya ningún enunciado expresable en el cálculo del que se sepa que es verdadero, pero cuya verdad no pueda ser establecida demostrativamente— es la exigencia de que ese cálculo sea *completo*. Estas son exigencias que se hacen al cálculo como un todo desde fuera de él, desde un metalenguaje. Cuando estudiamos un cálculo por ver si cumple estos requisitos estamos haciendo la *metateoría* de ese cálculo.

Ahora bien: aunque, en abstracto, no haya diferencia entre presentar una teoría lógica como sistema axiomático y darle la forma de sistema de reglas de inferencia, cuando optamos por una u otra modalidad lo hacemos obedeciendo a motivaciones muy concretas. La presentación de la lógica en forma de sistema de reglas de inferencia favorece, como hemos visto, su aplicación al razonamiento natural. Pero, por otra parte, su presentación como sistema axiomático hace más cómodas las consideraciones metateóricas. Y son metateóricas las consideraciones que ahora estamos bosquejando. Por eso desde ahora las referencias las haremos a la lógica de enunciados entendida como sistema axiomático, a sabiendas de que todo cuanto digamos puede hacerse extensivo a cualquier presentación de la lógica de enunciados como cálculo de deducción natural.

De sobra sabemos que cuando un enunciado es verdadero su negación es falsa, y viceversa. Cabe decir, entonces, que un determinado sistema es *consistente* cuando en él es imposible demostrar a la vez un enunciado y su negación. Dicho de otro modo: un sistema es consistente cuando, si X es una tesis del sistema, $\neg X$ no lo es.

Si en un sistema fuera posible demostrar a la vez un enunciado y su negación, entonces en ese sistema sería demostrable todo enunciado. En efecto[193]:

[193] Seguimos aquí el procedimiento utilizado por E. Nagel y J. R. Newman. Cfr. su trabajo *Gödel's Proof*. New York, New York University Press, 1958. Cap. V, versión cast.: *El teorema de Gödel*. Tr. de A. Martin. Madrid, Tecnos, 1970.

Puesto que un condicional con antecedente falso es siempre verdadero, cualquier expresión de la forma

$$X \rightarrow (\neg X \rightarrow Y)$$

será una tautología[194]. Tomemos esa expresión como premisa:

1.	$X \rightarrow (\neg X \rightarrow Y)$	P

Supongamos ahora que han sido demostrados en el sistema dos expresiones de la forma 'X' y '$\neg X$' (puesto que estamos operando sobre la base de que se trata de un sistema *inconsistente*). Añadámoslas como premisas y veamos qué se puede deducir de todo ello:

1.	$X \rightarrow (\neg X \rightarrow Y)$	P
2.	X	P
3.	$\neg X$	P
4.	$\neg X \rightarrow Y$	RE →, 1, 2
5.	Y	RE →, 3, 4

Puesto que Y puede ser sustituida por *cualquier* expresión del cálculo, es evidente que si en éste hubiera dos tesis que tuvieran respectivamente la forma X y $\neg X$, cualquier expresión construible con los símbolos del cálculo sería una tesis de éste. Quiere ello decir, entonces, que si un sistema es inconsistente son demostrables en él todas las expresiones bien formadas en él construibles. Lo cual a su vez quiere decir —utilizando de pasada la Regla de Contraposición del Condicional— que si no todas las fórmulas bien formadas de un sistema son demostrables —es decir, si hay al menos una que no lo es—, entonces es que el sistema es consistente.

Por otra parte, para que un cálculo constituya la formalización adecuada de una teoría ha de contar con unos axiomas lo suficientemente fecundos y unas reglas de transformación lo suficientemente fertilizantes como para poder demostrar todos los enunciados verdaderos de la teoría en cuestión. Se dice entonces que el sistema es completo. Un sistema es completo, por tanto, si toda expresión verdadera construible con sus símbolos es una tesis del sistema. En una teoría formalizada de manera completa dentro de un determinado cálculo no hay, por tanto, verdades «libres»: están todas controladas, en el sentido de que pueden ser establecidas a partir de la verdad de los axiomas transmitida por las reglas de inferencia.

Dos son las definiciones que fundamentalmente se dan de la noción

[194] En efecto: Si X es verdadero, entonces el condicional que tenga como antecedente a $\neg X$ (que será falso) resultará verdadero sea cual fuere su consecuente.

de compleción. La primera —mediante la que se expresa el sentido «débil» de este concepto— es la que acabamos de enunciar. La segunda ofrece una caracterización de la noción de compleción por respecto a la de consistencia. Un sistema es completo en sentido fuerte cuando, si se amplía su base axiomática[195], se vuelve inconsistente. Consistencia y compleción son, entonces —cuando empleamos este último término en este sentido— dos nociones en tensión: diríamos, si se nos permite el desenfado, que un cálculo puede resultar inconsistente por «pasarse de» completo, y resultar incompleto por «pasarse de» consistente.

Para tranquilidad del lector digamos que el cálculo de la lógica de unciados es un cálculo consistente y completo. O, por mejor decir, que a la lógica de enunciados se le puede dar la forma de un cálculo que reúna los requisitos de consistencia y compleción. Los dos que nosotros hemos presentado, por ejemplo, son cálculos acreditados que las reúnen.

Así, la teoría lógica más elemental es un cálculo acabado, terminante. Sobre cualquier inferencia que sometamos a su consideración emitirá un dictamen inapelable.

¿Sobre cualquier inferencia? Tomemos una[196]:

> No hay judíos en la cocina
> Ningún gentil dice «sphoonj»
> Todos mis sirvientes están en la cocina
> ―――――――――――――――――
> Mis sirvientes no dicen nunca «sphoonj»

Si ahora, utilizando los instrumentos de formalización de que hasta el instante disponemos, intentáramos representar la forma de este razonamiento con el fin de llegar a una estimación de su validez, nos encontraríamos con lo siguiente:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \hline s \end{array}$$

Y es evidente que, visto así, no se trata de un razonamiento válido. Es evidente —dicho de otro modo— que '$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$' no es una tautología.

[195] Es decir, si se añaden a los axiomas con que ya contamos otros que sean independientes de ellos.

[196] Inferencia debida a Lewis Carroll.

Y, sin embargo, «tenemos la sensación» de que se trata de un razonamiento correcto en su forma, de que si sus premisas son verdaderas, la conclusión cae por su propio peso. Da la impresión de que el dictamen de la lógica de enunciados no es aquí inapelable, de que podemos apelar a una instancia lógica superior, a un cálculo lógico de mayor capacidad analítica.

Así es. Se trata de un razonamiento formalmente válido. Lo que ocurre es que no hemos sido capaces de mostrar su forma lógica. Porque su forma lógica en ésta:

$$\begin{array}{l} \neg \bigvee x(Jx \wedge Cx) \\ \bigwedge x(\neg Jx \rightarrow \neg Dx) \\ \bigwedge x(Sx \rightarrow Cx) \\ \hline \bigwedge x(Sx \rightarrow \neg Dx) \end{array}$$

Y esta es la demostración de su validez:

1.	$\neg \bigvee x(Jx \wedge Cx)$	P
2.	$\bigwedge x(\neg Jx \rightarrow \neg Dx)$	P
3.	$\bigwedge x(Sx \rightarrow Cx)$	P
4.	$\bigwedge x \neg (Jx \wedge Cx)$	Df. $\bigvee$, 1
5.	$\bigwedge x(\neg Jx \vee \neg Cx)$	Df. $\wedge$, 4
6.	$\bigwedge x(Jx \rightarrow \neg Cx)$	Df. $\vee$, 5
7.	$Ja \rightarrow \neg Ca$	RE $\bigwedge$, 6
8.	$\neg Ja \rightarrow \neg Da$	RE $\bigwedge$, 2
9.	$Sa \rightarrow Ca$	RE $\bigwedge$, 3
10.	$Ca \rightarrow \neg Ja$	RContr. $\rightarrow$, 7
11.	$Sa \rightarrow \neg Ja$	RTr. $\rightarrow$, 9, 10
12.	$Sa \rightarrow \neg Da$	RTr. $\rightarrow$, 11, 8
13.	$\bigwedge x(Sx \rightarrow \neg Dx)$	RI $\bigwedge$, 12

Se trata de un razonamiento formalmente válido, pero cuya validez no puede ser establecida mediante el solo cálculo de enunciados. Y es que hay otras muchas formas válidas de razonar, además de aquellas que la lógica de enunciados es capaz de reconocer. Hay razonamientos cuya validez depende de algo más que de las puras relaciones entre enunciados que no se analizan. En lógica, con la lógica de enunciados no hemos hecho más que empezar.

Capítulo III
LA LOGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN

1. Nociones básicas

A) Introducción

Hacia la lógica de predicados

Con la lógica de enunciados, la lógica formal era capaz de decidir acerca de la validez de cualquier inferencia en la que se derivara un enunciado sin analizar de otro u otros enunciados que tampoco se analizaban. En otras palabras: la lógica formal, al nivel de la lógica de enunciados, sólo puede analizar formalmente de manera acabada aquellos razonamientos en cuya validez no desempeña ningún papel la estructura interna de las proposiciones que los componen.

Y, sin embargo, hay razonamientos que, siendo formalmente válidos, no lo son simplemente en virtud de las puras conexiones externas entre los enunciados a partir de los cuales están construidos. Su forma lógica no puede exhibirse cumplidamente tan sólo mediante letras de enunciado y conectivas. Es preciso ir más allá: penetrar en la estructura interna de los enunciados, en busca de elementos relevantes para la validez de la inferencia en cuestión. Al final del capítulo anterior poníamos un ejemplo de ese tipo de razonamientos cuya validez escapa a la lógica de enunciados. Pondremos ahora otro, extraído de la misma fuente: Lewis Carroll.

Ningún fósil puede estar traspasado de amor
Una ostra puede estar traspasada de amor

Las ostras no son fósiles

Si encomendáramos a la sola lógica de enunciados la mostración de la forma lógica de esta inferencia, nos encontraríamos, como bien sabemos, con esto:

$$
\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}
$$

Y así se daría el caso de que un razonamiento que, a la luz de la intuición, a la luz de la lógica «natural», es válido, no lo sería a la luz de la Lógica. Si la Lógica fuera sólo la lógica de enunciados, mal cumpliría su función de análisis formal de la validez de los razonamientos. Pero no: la Lógica dispone de otros recursos. Y ante un razonamiento como el anteriormente reproducido, la Lógica llevaría a cabo un análisis cuyo resultado sería el siguiente:

$$
\begin{array}{c} \wedge x (Fx \rightarrow \neg Px) \\ \wedge x (Ox \rightarrow Px) \\ \hline \wedge x (Ox \rightarrow \neg Fx), \end{array}
$$

y mostraría la validez del razonamiento estableciendo que a partir de unas premisas que tengan esa forma se puede derivar una conclusión como ésta. De este modo, quizá:

1.	$\wedge x (Fx \rightarrow \neg Px)$	P
2.	$\wedge x (Ox \rightarrow Px)$	P
3.	$Fa \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Oa \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 2
5.	$Pa \rightarrow \neg Fa$	RContr $\rightarrow$, 3
6.	$Oa \rightarrow \neg Fa$	RTr $\rightarrow$, 4, 5
7.	$\wedge x (Ox \rightarrow \neg Fx)$	RI $\wedge$, 6

¿Cómo hemos conseguido dar esta versión de la validez formal del razonamiento propuesto? Analizando los dos enunciados que constituyen sus premisas y el enunciado que se presenta como conclusión.

Analizando los enunciados, hemos dicho. ¿Qué tipo de análisis es ése? Un análisis *lógico*.

En el apartado 1 del Capítulo II de esta obra señalábamos cómo a cada estrato de la lógica corresponde un determinado nivel de análisis del lenguaje. De análisis lógico del lenguaje, porque ya hemos dicho que en ese análisis lo único que queda retenido son aquellos elementos del lenguaje que resultan importantes desde un punto de vista lógico —dando de lado aquellos otros que los lógicos acostumbran a llamar, con expresión quizá involuntariamente peyorativa, elementos «retóricos» del lenguaje, de los que se piensa que carecen de trascendencia lógica y son objeto de estudio de la sola gramática [197]. A la lógica de enunciados, recordemos, correspondía un análisis del lenguaje que distingue en éste dos tipos de elementos: de una parte, los enunciados como unidades; de otra parte, una serie de partículas —'y', 'o', 'si..., entonces...', etc.— mediante las que componemos enunciados a partir de enunciados simples. A la lógica de predicados, en la que nos estamos iniciando, corresponde otro tipo de análisis: un análisis que penetra en los enunciados, que los examina por dentro.

Podría parecer que con esto abandonamos la lógica de enunciados para entregarnos a empresas lógico-formales de mayor fuste. Nada de eso. La lógica de enunciados sigue con nostros. No se trata de abandonarla, sino de prolongar el análisis lógico. La lógica no es un conjunto de cálculos desperdigados; tampoco un conjunto de cálculos simplemente superpuestos cada uno de los cuales sea la negación de los inferiores y el inicio de algo enteramente nuevo. La lógica, es, más bien, una acumulación organizada de cálculos cada uno de los cuales supone la integración de los anteriores en un sistema más amplio [198]. No es, por tanto, que al pasar a exponer ahora el cálculo de predicados vayamos a dejar a un lado para siempre —en razón de las limitaciones de su alcance— el cálculo de enunciados. Lo que haremos será construir a partir de él —y conservándolo como cálculo básico, de fondo— un más poderoso instrumento de análisis lógico.

Nombres y predicados

Así pues, la lógica de predicados supone una extensión del análisis lógico formal a través del examen lógico de la estructura de los enunciados. Preguntémonos ya: ¿qué descubre la lógica dentro de los enunciados? ¿Qué hay allí que le interese?

Hay, fundamentalmente, dos cosas. De una parte, expresiones que se refieren a *individuos*. De otra parte, expresiones que designan *propiedades* de individuos o *relaciones* entre ellos. Interesa señalar que por 'individuo' no entendemos sólo, como el uso de la palabra ha llegado sugerir, individuos humanos, sino, en general, cualquier ser concreto, determinado, identificable frente a todo lo demás, único en algún sentido: personas, pero también montañas, números, ciudades, estrellas, países, obras de arte. Todo aquello que tenga o pueda tener lo que la gramática tradicional llamaba un 'nombre propio'.

---

[197] Y muchos lingüistas han puntualizado, con razón, que esos elementos «lógicamente relevantes» no son, si bien se mira, tan escasos como muchos lógicos piensan (Véase, por ejemplo, *Semantic Theory*, de J. Katz. N. York, Harper ando Row, 1972).

[198] Aquellos lectores que sepan de aritmética y análisis matemático hallarán una analogía esclarecedora en la historia de la progresiva ampliación del concepto de número.

Veamos qué es lo que, situados en esta perspectiva, podemos distinguir en los siguientes enunciados:

(1) Virginia Woolf era inglesa.
(2) Buster Keaton estalló en carcajadas.
(3) 5 es menor que 7.
(4) Aníbal atacó Sagunto.
(5) Lewis Carroll tenía más talento lógico que Carl Prantl.
(6) El Jefe del Partido Fascista de la Atlántida tomó asiento entre Groucho Marx y Guillermo Brown.
(7) Wittgenstein dedicó el *Tractatus Logico-Philosophicus* a David H. Pinsent.
(8) Otelo amaba a Desdémona más que a Eloísa.
(9) Azorín prefería Castilla a Transilvania.
(10) Justiniano dio a Moisés las Tablas de la Ley a cambio del becerro de oro.
(11) Sócrates fue el maestro de Platón, Euclides de Megara y Fedón de Elis.
(12) El capitán Nemo abandonó el Amazonas en busca del Missisipi y de Laura.
(13) Lloro por la muerte de Crisipo, Escoto Erígena, Edgar Allan Poe y Constantino Kavafis.
(14) Cierto reformador religioso intentó hacer una síntesis de Confuncio, Lutero, Akhnatón y H. P. Lovecraft.
(15) Hitler hizo exiliarse a Brecht, Einstein, Freud, Thomas Mann y Fritz Lang.

En este conjunto de enunciados podemos distinguir, por una parte, nombres de individuo —'Buster Keaton', 'Otelo', 'Platón', 'Castilla', 'cierto reformador religioso', 'el Jefe del Partido Fascista de la Atlántida'[199]—, y, por otra parte, expresiones que, o bien designan propiedades características, estados, etc.) de individuos —'... era inglesa', '... estalló en carcajadas'— o bien relaciones entre ellos —'... atacó ...', '... prefería ... a ...', etc. A las expresiones del primer tipo seguiremos llamándolas 'nombres de individuo', o 'nombres' a secas. Para designar a las del segundo introduciremos el término '*predicado*'. Los predicados son, pues, expresiones que designan propiedades o relaciones.

Convengamos en sustituir, a efectos de esquematización lógica, los nombres de individuo por las primeras letras del alfabeto escritas en minúscula: *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Y en esquematizar las expresiones predicativas mediante letras mayúsculas que serán una especie de abreviatura de ellas, en el sentido que veremos.

[199] Expresiones como esta última, que, de momento, incluimos entre los nombres, serán objeto de examen especial más adelante, bajo el epígrafe '*Descripciones*'.

¿Cómo combinar símbolos de estos dos tipos para representar enunciados?

Vayamos por partes, comenzando por la más fácil.

Tomemos el primer enunciado de nuestra lista:

Virginia Woolf era inglesa.

Puesto que hemos acordado reemplazar los nombres de individuos por las letras *a*, *b*, *c*, *d*, etc., y puesto que en el enunciado que acabamos de reproducir no hay más que un nombre de individuo, ese enunciado quedaría, a medio esquematizar, así:

a era inglesa.

De igual modo, los enunciados (3), (6), (11) y (13) de nuestra lista, tomarían, respectivamente, estas formas:

a es menor que *b*
a tomó asiento entre *b* y *c*
a fue el maestro de *b*, *c* y *d*
a llora por la muerte de *b*, *c*, *d* y *e*.

El próximo paso ha de consistir en introducir los símbolos de predicado. ¿Cómo hacerlo?

La lógica contemporánea adopta un procedimiento que a primera vista pudiera parecer un tanto artificioso, pero que a la postre se revela como el más apropiado desde el punto de vista del análisis lógico. Es, después de todo, un procedimiento inaugurado por el propio Aristóteles, el fundador de la Lógica, y consiste en escribir el símbolo de predicado delante del símbolo o símbolos de individuo.

Según eso, la expresión

Virginia Woolf era inglesa

se convierte en

Ia

Y esta fórmula puede leerse '*I* de *a*' (es decir, '*I* se dice de *a*', '*I* se da en *a*', etc.). Ni que decir tiene que, aquí, '*I*' es una abreviatura del predicado '... es inglesa' ('el ser inglesa se da en Virginia Woolf', o 'el ser inglesa se dice de Virginia Woolf').

De acuerdo con estos criterios, los quince enunciados que hemos puesto como muestra tomarían respectivamente las siguientes formas:

(1) *Ia*.
(2) *Ca*.
(3) *Mab*.
(4) *Aab*.
(5) *Tab*.
(6) *Sabc*.
(7) *Dabc*.
(8) *Aabc*.

(9) *Pabc*.
(10) *Dabcd*.
(11) *Mabcd*.
(12) *Abcd*.
(13) *Labcde*.
(14) *Sabcde*.
(15) *Eabcdef*.

Recuérdese que cada letra mayúscula es la abreviatura (no necesariamente la inicial) del predicado que corresponda. Así, en el enunciado (2), '*C*' simboliza el predicado '... estalló en carcajadas'; en (5), '*T*' resume el predicado '... tenía más talento lógico que ...'; etc.

Predicados monádicos y predicados poliádicos

Vistos así los enunciados por dentro, la lógica procede a clasificarlos en dos grandes tipos: aquellos en los que aparece *un solo* nombre de individuo, y aquellos otros en los que son *dos o más* nombres de individuo los que intervienen. Digámoslo de otra manera, ateniéndonos a la letra del simbolismo: hay, de una parte, símbolos predicativos que van seguidos de un solo nombre de individuos (el de aquel a quien se adscribe la propiedad, el estado, la característica designada por el predicado), y, de otra parte, símbolos predicativos que anteceden a dos o más nombres de individuos (los de aquellos entre quienes se da la relación que el predicado representa). A los predicados del primer tipo se les llama *predicados monádicos*, y *predicados poliádicos* a los del segundo. Los predicados poliádicos podrán ser, específicamente, *diádicos* —cuando para formar un enunciado se requiere que los sigan *dos* nombres de individuo (casos (3), (4) y (5) de nuestra lista de ejemplos)—; *triádicos* —cuando son *tres* los nombres de individuo que el predicado engarza (casos (6), (7), (8) y (9)); *tetrádicos* (casos (10), (11), (12)); *pentádicos* (casos (13), (14)). Etc.

Y es que en el lenguaje ordinario hay dos tipos de expresiones: aquellas cuyos usos constituyen siempre predicados poliádicos, predicados *por principio* poliádicos; y aquellas otras que pueden usarse bien como predicados monádicos, bien —con el complemento de ciertas partículas— como predicados poliádicos. Ilustraremos esta afirmación mediante algunos ejemplos.

'Preferir' es verbo cuyos usos requieren siempre la presencia, cuando menos, de tres nombres de individuo[200]: el del individuo que prefiere, el de aquello que prefiere y el de aquello otro que postpone ('... prefiere ... a ...', donde cada tramo de puntos es un lugar reservado a un nombre de individuo). Así, pues, todo uso del verbo 'preferir' equivale al uso de un predicado como mínimo triádico. Como mínimo, en efecto, pues bien pudiera ocurrir que no hubiera simplemente un solo preferidor, un único

[200] Salvo, claro está, cuando nos limitamos a conjugarlo, es decir, cuando lo usamos para mencionarlo.

objeto preferido y un único objeto preterido, sino, por ejemplo, un preferidor que prefiriera dos objetos a un tercero; etc. Asimismo, los usos del verbo 'dar' exigen, en cualquiera de sus formas, el concurso de al menos tres nombres de individuo: el del donante, el del don, y el del beneficiario. Constituirían, pues, en el caso más simple, un predicado triádico; y aun pudiera ocurrir que el donante exigiera algo a cambio de lo que da. Nos las habríamos, entonces, con un predicado tetrádico: '... da ... a ... a cambio de ...'. Etc.

'Amar' es también un verbo que, para su uso ordinario, precisa, en el más íntimo de los casos, de dos nombres de individuo (el del amante, el del amado). Por otra parte, todos los usos del verbo 'suicidarse' constituyen expresiones predicativas exactamente diádicas. Y la expresión 'ser bígamo' encierra el uso de un predicado triádico, ya que decir que *a* es bígamo es decir que *a* se casó con una persona, llamémosle *b*, y —sin disolver el matrimonio— con una tercera, *c*.

Es, pues, evidente que hay una serie de elementos del lenguaje los cuales, en su uso completamente explícito, entrañan, para constituir enunciados, la reunión en torno suyo, debidamente articulados, de dos o más nombres de individuo. No se es traidor como se es, por ejemplo, tuberculoso. Se puede ser —estar— tuberculoso a solas, monádicamente. Pero para ser un traidor hay que haber traicionado a alguien, o algo. De igual modo, no se estrangula sin más. Ha de haber también una víctima, al menos. Y nadie tiene la propiedad de ser amigo, a secas: lo que tendrá es una relación de amistad con algún o algunos otros. 'Traicionar', 'estrangular', 'ser amigo' funcionar en el lenguaje como expresiones predicativas poliádicas.

No hay que olvidar, sin embargo, la existencia de expresiones predicativas que dan lugar a enunciados sin más compañía que la de un solo nombre de individuo.

Así, por ejemplo, el verbo 'morir' (o cualquiera de los verbos que ordinariamente se tienen por sinónimos de éste) se presta a un uso como predicado monádico: 'Murió Evariste Galois', 'Rubén Darío feneció', etc. No por eso, sin embargo, nos está vedado construir con estos verbos expresiones predicativas poliádicas, como la que figura en el enunciado 'Evariste Galois murió por una mujer'. También el verbo 'correr' puede emplearse como predicado monádico: 'Bergonzoli[201] corre'. Pero también se puede —y en este caso se debe— decir: 'Bergonzoli corre delante de ciertas unidades del Ejército de la República'.

La naturaleza de los predicados

Hablábamos antes del carácter acumulativo de los cálculos lógicos. Ahora estamos empezando a verlo. A los dos tipos de símbolos que

[201] Jefe de la división italiana *Littorio* en el frente de Guadalajara (marzo de 1937).

manejábamos en el cálculo de enunciados —letras de enunciado y conectivas— hemos añadido otros dos: símbolos que designan individuos concretos y símbolos que representan predicados. He aquí una expresión en la que aparecen a la vez ejemplares de esos cuatro tipos de símbolos:

$$Pa \wedge p,$$

que podría constituir una simbolización de, por ejemplo, la siguiente conjunción de enunciados

Murió César Vallejo y llovía a cántaros.

En el capítulo anterior dábamos precisiones sobre la naturaleza de las conectivas: eran, decíamos, *functores*. Cada conectiva es —o puede interpretarse como— una función: una función que relaciona los valores —de verdad— de los enunciados que conecta con los valores del enunciado que resulta de conectarlos.

Precisemos ahora la naturaleza de los predicados: también *los predicados son functores*. Sólo que se aplican a nombres de individuo, y no a enunciados. Veamos cómo.

Vamos a utilizar, por parecernos muy expresivo, un pasaje de una novela de Jonathan Princeford —el autor que hizo famoso al detective Doctor Asquith— titulada *No más allá de allende los mares:*

> El Teatro de la Opera había quedado rodeado. Todos —los músicos, los empleados del local, los exquisitos oyentes— permanecían donde estaban en el instante en que se esuchó el espantoso alarido. Los policías formaban una circunferencia en torno al edificio, y otra circunferencia —que la disposición del teatro hacía, curiosamente, concéntrica de la anterior— encerraba a la orquesta en el escenario.
>
> Cuando el Doctor Asquith, acompañado del burgomaestre y del superintendente de policía, hizo su aparición en las tablas, nadie aplaudió.
>
> —Tienen ustedes, señoras y señores —comenzó el Doctor Asquith una vez que hubieron cesado los rumores—, derecho a una explicación. Y no sólo por el estridente sonido que hace unos minutos vino a romper la armonía de la Primera Sinfonía de Brahms, e incluso a interrumpir su ejecución, sino también, y sobre todo, por las circunstancias que rodearon la emisión de ese sonido y lo hicieron, ya que no necesario, sí altísimamente probable. Entre bastidores se ha cometido, señoras y señores, un asesinato.
>
> He dicho bien. Un asesinato. Hablemos primero de la víctima, demorando entre tanto la consideración de su asesino. La víctima... Señoras y señores, el rubor me turba. Todos nosotros nos habíamos reunido aquí con la intención de escuchar a la Orquesta del Estado de Rachsiw en un concierto dedicado enteramente a la obra de Johannes Brahms, de quien su director conduce, si hemos de prestar crédito a lo que por doquier se dice, versiones especialmente penetrantes y remansadas. Mi voz se quiebra, como pueden comprobar, al informarles de que la Orquesta del Estado de Rachsiw no es una orquesta, sino un mudo remedo de lo que por tal comúnmente se entiende. Porque, señoras y señores, la Orquesta del Estado de Rachsiw no toca. Se limitan sus miembros a ejecutar una pantomima, a imitar en el escenario los movimientos propios de una orquesta, mientras un diestro ponedor de discos, al amparo de un perfeccionadísimo sistema de altavoces, hace surgir, entre bastidores, el sonido que aquellos afectan producir.
>
> Pero dejemos eso, que no es sino penosísima anécdota frente a la gravedad del suceso que, al socaire de este inmenso fraude, ha tenido lugar. De la Orquesta —si se me permite la sinécdoque— del Estado de Rachsiw se ocupará el superintendente Rachnos, aquí presente. Concentrémonos nosotros en el diestro ponedor de discos. El es la víctima. Su nombre era Leslew Soncarr, y su muerte reviste caracteres que ni siquiera una persona como yo, curtida en cien asesinatos, vacilaría en calificar de sorprendente. Iré al grano, sin más circunloquios. Su muerte se ha producido por seccionamiento de la yugular. Y la yugular le ha sido seccionada con un disco previamente afilado.
>
> Pero el refinamiento del asesino ha ido aún más lejos. El disco homicida tenía grabadas composiciones de Maurice Ravel. Y es el caso que el embozado ponedor de discos experimentaba profunda aversión hacia la música de este compositor. Decir «aversión» es, empero, decir poco. El contacto con un disco de Ravel —no ya su audición, sino el mero contacto físico, por brevísimo que fuera— le producía instantáneamente, en décimas de segundo, un eccema inequívoco en los antebrazos. Y no hay ni rastro de ese eccema en los antebrazos de la víctima. Ni rastro, señoras y señores.
>
> Y el burgomaestre me ha pedido que descubra la verdad y que la haga pública aquí y ahora para satisfacción de todos ustedes.
>
> Y yo no puedo hacerlo, señoras y señores, por la razón de que todavía no he descubierto al asesino. Es muy pronto para ello. Es muy pronto incluso para quien, como yo, ha cimentado su fama en la celeridad de sus deducciones.
>
> No teman, sin embargo. Identificaré al asesino[202]. Mas por el momento no estoy en condiciones de revelarles la verdad de este asunto.
>
> Pero tampoco proferirá mi boca falsedad alguna. Y así, puesto que la verdad no puedo decirla, y la falsedad no quiero, han de contentarse ustedes por ahora con escuchar lo siguiente: x asesinó a Leslew Soncarr.
>
> Dicho lo cual abandonó la escena. Tampoco ahora hubo aplausos.

Tomemos la expresión

x asesinó a Leslew Soncarr

Es evidente que '*x*' no es un símbolo como '*a*', '*b*', '*c*', etc. '*x*' no es el nombre de ningún individuo determinado. No es una costante. Es una *variable*. Una variable que puede ser sustituida por cualquier nombre de individuo (capaz de asesinar). En su lugar podríamos escribir el nombre de cualquier entidad concreta. Podríamos reemplazarla por cualquier nombre propio. Al hacerlo —cada vez que lo hiciéramos— convertiríamos aquella expresión en un enunciado. Porque es que la expresión

x asesinó a Leslew Soncarr

[202] El Doctor Asquith cumple, en efecto, su promesa en el capítulo IX y último de la novela. El asesino era el Doctor Nosgdod, amante de la esposa de Soncarr. Aduciendo su concidión de médico —un tramoyista había hecho público su dolor físico—, penetró entre bastidores, y allí asesinó a Soncarr del modo que se ha relatado, no sin antes haberle propinado una inyección antialérgica.

no es un enunciado. Y no es un enunciado porque —como ha sabido ver el Doctor Asquith— no es ni verdadera ni falsa. Se convertirá en un enunciado —verdadero o falso— cada vez que demos valores determinados a *x*. Y así, cuando, por ejemplo, digamos, escribiendo 'Moriarty' en el lugar de *x*,

Moriarty asesinó a Leslew Soncarr,

habremos construido un auténtico enunciado —en este caso, un enunciado falso.

Enunciados falsos serían también estos otros:

Perpenna asesinó a Leslew Soncarr
Fernando VII asesinó a Leslew Soncarr
Ramón Mercader asesinó a Leslew Soncarr,

enunciados que hemos formado sustituyendo la variable '*x*' por tres distintos nombres de individuo.

Sin embargo, si sustituyéramos '*x*' por 'el Doctor Nosgdod' nos encontraríamos con el enunciado

El Doctor Nosgdod asesinó a Leslew Soncarr

Podemos, pues, construir una serie de expresiones que, si bien no constituyen enunciados —en la medida en que no tienen valores de verdad—, se convierten en tales cuando se sustituye la variable o variables de individuo que en ellos aparecen por nombres de individuo. Esas expresiones son expresiones funcionales. Los argumentos de la función son nombres de individuo. Los valores de la función son enunciados (verdaderos o falsos).

En este sentido decimos que los predicados son functores. Pero no functores de enunciado, como las conectivas, sino functores de nombres. Sus argumentos serán los nombres de individuo de los que, en cada caso, se predican; los valores de la función serán los valores de verdad de los enunciados que así se constituyen. La distinción entre predicados monádicos y predicados poliádicos se convierte en la distinción entre functores de nombres con un solo argumento y functores de nombres con dos más argumentos.

A esas expresiones como

x es un leñador
x escribió *y*
x concibió *y* en *z*
x contrató a *y* para que sobornara a *z* y a *w*,

que, sin ser propiamente enunciados, pueden llegar a serlo por simple asignación de valores a las variables que contienen; a esos enunciados en ciernes que están a un paso de convertirse en enunciados consumados, se les ha llamado de diversos modos: 'funciones de enunciado', 'funciones proposicionales', 'matrices de enunciado', 'fórmulas abiertas', 'enunciados abiertos', etc. Darles el nombre de 'funciones de enunciado' supondría propiciar su confusión con las conectivas. La composición de enunciados —es decir, la formación de enunciados compuestos mediante una conectiva— podía, según vimos, interpretarse como la aplicación de una función cuyos argumentos fueran los valores de verdad de los enunciados componentes y cuyos valores fueran los valores de verdad del enunciado compuesto resultante. La utilización de un predicado puede interpretarse también como la aplicación de una función. Los valores de estas otras funciones son también valores de verdad —los de los enunciados resultantes—, pero sus argumentos no son valores de verdad, sino nombres de individuo. Por ello, parece que o bien deberíamos llamarles 'funciones de nombre' —haciendo así, entre ellos y las conectivas, una distinción basada en los respectivos tipos de argumento— o bien habríamos de optar por llamarlos de otro modo. Los llamaremos 'enunciados abiertos'.

Cómo cerrar enunciados abiertos

Conocemos ya un procedimiento: sustituir la variable o variables que en ellos figuran por otros tantos nombres de individuo. De esta forma, el enunciado abierto

x escribió *y*

se cerrará, por ejemplo, en el enunciado

Don Ventura de Reyes y Prósper escribió *El raciocinio a máquina*

o en

William Burroughs escribió *Naked Lunch*.

Hay, sin embargo, un segundo procedimiento. Digamos brevemente que consiste en *cuantificar* las variables. Y expliquemos en qué consiste la cuantificación.

Todos los enunciados que hasta ahora hemos venido mencionando a título de ejemplo eran enunciados singulares: enunciados en los que, o bien se adscribía un cierto atributo a un determinado individuo, o bien se establecía una determinada relación entre dos o más individuos

concretos. Es evidente, sin embargo, que los enunciados que proferimos no son siempre enunciados singulares.

Tomemos un enunciado abierto

x es un corsario

Hay una serie de nombres que, al ser escritos en el lugar de x, dan lugar a un enunciado verdadero (así, los nombres 'sir Walter Releigh', 'sir Francis Drake', 'Cavendish', etc.). Y otro conjunto de nombres que darían lugar a un enunciado falso (por ejemplo, 'Pío IX', 'Enrique III el Doliente', 'Ramsés II').

Supongamos, en cambio, un enunciado abierto como el siguiente,

x es idéntico a sí mismo.

¿Qué ocurre en este caso? Ocurre que, sea cual fuere el nombre de individuo con que sustituyamos la variable x, el enunciado resultante es verdadero. ¿Por qué? Porque toda cosa es idéntica a sí misma. Podríamos, entonces, expresar esta circunstancia diciendo

todo x es idéntico a sí mismo.

De igual modo, en el ejemplo anterior a éste, cabría expresar el hecho de que hay x que son corsarios diciendo

algunos x son corsarios.

Pues bien: a estas dos expresiones, '*todos*' y '*algunos*', se las conoce con el nombre de «*cuantificadores*». La razón del nombre está clara: por medio de ellas indicamos *cuántos* individuos poseen una cierta propiedad o entre cuántos individuos se da una cierta relación. Al cuantificador 'todos' se le denominará «cuantificador universal»[203]. «Cuantificador particular» será el nombre del cuantificador 'algunos'. El símbolo del cuantificador universal será '$\bigwedge$'. El del cuantificador particular, '$\bigvee$'.

[203] 'Universal', no porque se refiera al universo entero (aunque ése sea el caso en este primer ejemplo que nosotros hemos puesto), sino a todo un *universo del discurso*. Por 'universo del discurso' entendemos el conjunto de objetos que constituye el marco de referencia de nuestro lenguaje en un momento dado. Así, si estamos haciendo aritmética, el universo del discurso vendrá dado por el conjunto de los números naturales. Si hablamos de demografía, por el conjunto de los seres humanos. Etc. El universo del discurso es, pues, por así decir, el conjunto horizonte, sobre el fondo del cual hacemos en cada caso las afirmaciones que sean, relativas a conjuntos contenidos en él.

No quiere ello decir, sin embargo, que el cierre por cuantificación de unos enunciados abiertos como los de antes,

x es idéntico a sí mismo
x es un corsario

haya de simbolizarse

$\bigwedge x$ es idéntico a sí mismo
$\bigvee x$ es corsario

No. Sino

$\bigwedge x$ (x es idéntico a sí mismo)
$\bigvee x$ (x es un corsario)

Vemos, pues, cómo el cuantificador constituye, junto con la muestra de la variable a la que afecta, una especie de prefijo que cierra el enunciado abierto en el que esa variable aparece.

Esquematizando ahora los predicados 'es idéntico a' y 'es un corsario' por el procedimiento que ya conocemos, tendremos, por fin,

$\bigwedge x\,(Ixx)$[204]
$\bigvee x\,(Cx)$

Y estos ya no son enunciados abiertos, sino enunciados cerrados, expresiones con un determinado valor de verdad.

Si convenimos, como es usual, en llamar *ligadas* a las variables afectadas por algún cuantificador (como 'x' en la expresión '$\bigwedge x\,(Px)$'), y variables *libres* a aquellas otras a las que ningún cuantificador alcanza (como 'y' en la expresión '$\bigwedge x\,(Pxy)$'), podremos decir que son enunciados —enunciados cerrados— aquellos que, o bien no contienen variables, o bien no contienen variables libres. Son, pues, enunciados, por ejemplo,

Ba
$\bigwedge x \bigwedge y\,(Px \rightarrow Qy)$
$\bigvee x \bigwedge y\,(Qy \rightarrow Sx)$
Etc.

[204] O, en forma más familiar:

$\bigwedge x\,(x = x)$.

No lo serán, en cambio, expresiones como

$$\wedge x\ (Pxy \rightarrow Qyx)$$
$$\wedge x\ \vee y\ (Pxyz \rightarrow Qzyx),$$

en las que, respectivamente, '*y*' y '*z*' están libres.

Los cuantificadores

Despleguemos el sentido de los cuantificadores a través de una serie de ejemplos más explícitos.

Sean los siguientes enunciados:

(1) Todas las iglesias románicas son hermosas.
(2) Los libros de Tihamer Toth son afrodisiacos.
(3) Cualquier desviación será reprimida con la mayor dureza.
(4) El hombre es portador de valores eternos.
(5) Hay escritores que pretenden destruir el lenguaje.
(6) No faltan epicúreos entre los purpurados del Renacimiento.
(7) En los vampiros se dan casos de hemofilia.
(8) Algunas ciudades son inhabitables.

Lo primero de todo sería señalar —aunque para percibirlo no se requiere el concurso de la lógica, bastando la mera puesta en ejercicio de la competencia lingüística de cada cual— que los cuatro primeros enunciados son enunciados universales, generales, enunciados que afirman algo acerca de *todos* los individuos de un determinado tipo o clase (los libros de Tihamer Toth, los hombres, las iglesias románicas). Los enunciados (5), (6), (7) y (8) son, en cambio, enunciados particulares, enunciados en los que se afirma que algunos individuos de una determinada clase ostentan una determinada propiedad.

Se impone, entonces —y ahora ya estrictamente desde el punto de vista de la lógica formal—, una reflexión similar a la que en el capítulo anterior hacíamos acerca de la relación entre las conectivas de la lógica de enunciados y aquellas partículas del lenguaje ordinario que de algún modo parecen corresponderles. Aquí vemos también que lo lingüísticamente diverso se vuelve, en lógica, uniforme. Hay, en el lenguaje ordinario, muy variadas maneras de indicar la universalidad, de mostrar el carácter general de un enunciado: a veces lo hacemos anteponiendo la palabra 'todos' al sujeto; en otras ocasiones, la palabra no es 'todos', sino 'cada' («cada hombre es un mundo»), o 'quien' («quien mal anda mal acaba»), o 'el que' («el que calla, otorga»), etc.; hay casos en los que basta con poner la partícula 'siempre' en el lugar oportuno («un perro es siempre un enemigo»); otras veces el simple artículo determinado cumple una función generalizadora («los duelos con pan son menos»). Etc.

Del cuantificador particular cabe decir otro tanto: que en el lenguaje ordinario se lo puede representar de múltiples maneras. Y así, los cuatro últimos enunciados de nuestra serie de ejemplos tendrían, en el fondo, la misma forma. Su significado sería el mismo si todos comenzaran, como de hecho ya comienza el último, con la partícula 'algunos':

Algunos escritores pretenden destruir el lenguaje.
Algunos purpurados del Renacimiento son epicúreos.
Algunos vampiros son hemofílicos.
Algunas ciudades son inhabitables.

La distinción entre ambos cuantificadores está, pues, aunque oscuramente, clara. La simbolización ayudará, sin embargo, a que la claridad no sea menor.

Fijémonos, para empezar, en los enunciados (1), (2), (3) y (4). ¿Qué se dice en todos ellos? Se dice que todos los sujetos que poseen cierta cualidad poseen también tal otra. O —acercándonos ya a la letra de la simbolización— que, para todo individuo, *si* ese individuo posee la propiedad designada por un determinado predicado (llamémosle '*P*'), *entonces* habremos de atribuirle también la propiedad designada por otro predicado, '*Q*'. En símbolos:

$$\wedge x\ (Px \rightarrow Qx)$$

De este modo, nuestro ejemplo (2) podría glosarse como sigue:

Para todo *x*, si *x* es un libro de T. Toth, entonces *x* es afrodisiaco.

O, representando los predicados mediante abreviaturas de las expresiones correspondientes en el lenguaje ordinario,

$$\wedge x\ (Lx \rightarrow Ax),$$

donde '*L*' significa 'ser un libro de T. T.' y '*A*', 'ser afrodisiaco'.

Lo mismo podríamos hacer, evidentemente, con todos los demás ejemplos:

(1) $\wedge x\ (Ix \rightarrow Hx)$
(3) $\wedge x\ (Dx \rightarrow Rx)$
(4) $\wedge x\ (Hx \rightarrow Px)$[205]

[205] Alguien podría objetarnos que 'constituir una desviación' y 'ser portador' no son predicados monádicos, sino por principio poliádicos (se porta algo, las desviaciones lo son

Dos preguntas pudieran platearse en relación con el cuantificador universal: 1.ª ¿Es que los enunciados universales han de representarse siempre por medio de un condicional? 2.ª ¿Por qué representamos el cuantificador universal mediante el símbolo '$\wedge$'?

La respuesta a la primera pregunta es: sí. Siempre mediante un condicional (o, en algunos casos, mediante un bicondicional)[206]. Y la razón, ya apuntada, es que todo enunciado universal expresa una conexión entre dos predicados, de tal manera que todos los sujetos del primero son por ende sujetos del segundo. Digamos: «todas las personas normales son aburridas». Ello equivale a decir: «Dado un x, si ese x es una persona normal, entonces ese x es una persona aburrida». Si se es lo primero, se es lo segundo (o, al menos, eso es lo que dice el que profiere tal enunciado). Un predicado conlleva el otro: la posesión del atributo designado por el primero es condición suficiente de la posesión del atributo designado por el segundo. Por eso, en el capítulo anterior, al presentar como ejercicio de repaso la experiencia de P. C. Wason, decíamos que el enunciado «En todas las tarjetas en las que hay un triángulo rojo hay un círculo azul» era un enunciado condicional. Porque ese enunciado equivale a este otro: «Dada una tarjeta[207], si en ella hay un triángulo rojo, entonces hay también un círculo azul».

¿Por qué —preguntábamos en segundo lugar— hemos elegido '$\wedge$' como símbolo del cuantificador universal? Porque ese símbolo recuerda el de la conjunción, y con la conjunción está, en otro sentido, estrechamente relacionado el cuantificador universal. En el sentido siguiente: decir '$\wedge x\, Px$' —esto es, decir que todos los x tienen la propiedad designada por el predicado P— es tanto como decir —en el caso de que el conjunto de los x tenga un número finito de miembros— que el individuo a —que es uno de los x— tiene la propiedad P, y que el individuo b tiene la propiedad P, y que el individuo c tiene la propiedad P, y así hasta agotar el número de los x. De igual modo, decir '$\wedge x\,(Px \rightarrow Qx)$' equivale a decir 'si el individuo a posee la propiedad P, entonces posee la propiedad Q, y si el individuo b posee la propiedad P, entonces posee la propiedad Q,

siempre por respecto a algo). Asimismo podría aducirse que en la expresión 'ser una iglesia románica' hay dos predicados, y no uno. Cierto. Pero piénsese que la lógica no obliga a representar en símbolos todos los nombres de individuo y todas las expresiones predicativas que puedan encontrarse en un enunciado. Se limita a ofrecer la posibilidad de hacerlo en aquellos casos en los que ello resulte necesario para poder mostrar, por ese medio, la validez de una inferencia.

[206] Salvo, como veremos, cuando el universo del discurso esté especificado con anterioridad y no haga falta ulterior referencia a él. Si, por ejemplo, se sabe que estamos hablando de las iglesias prerrománicas asturianas, podremos limitarnos a decir a un supuesto interlocutor: «Todas son hermosas». La representación de esta expresión en símbolos ('$\wedge x\, Px$') no exigiría el concurso del condicional. Se da por descontado que el conjunto de los x es el de las iglesias prerrománicas asturianas.

[207] Y el universo del discurso está constituido, en este caso, por el conjunto de las cuatro tarjetas.

y si el individuo c posee la propiedad P, entonces posee la propiedad Q, etcétera'.

Un enunciado general equivale, por tanto, a una conjunción de enunciados singulares. De tal modo que si el conjunto de los valores de x es el conjunto $\{a, b, c, d\}$, podremos decir

$$\wedge x\, Px \leftrightarrow Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge Pd.$$

Del mismo modo que el cuantificador universal se relaciona con el condicional, por una parte, y, por otra parte, con la conjunción, así también el cuantificador particular está conectado formalmente con la conjunción, en un sentido, y, en otro sentido, con la disyunción.

¿Por qué con la conjunción? Porque lo que afirmamos mediante un enunciado particular es que hay ciertos individuos que a la posesión de una cierta propiedad unen la posesión de otra. No enunciamos, como mediante el cuantificador universal, una conexión entre predicados, sino una coincidencia de predicados, la presencia simultánea de dos propiedades en algún individuo. No decimos que todos los individuos de los que puede predicarse P sean, por ello mismo, sujetos del predicado Q; decimos, más bien, que hay individuos de los que puede predicarse P y de los que, además, puede predicarse Q. Decimos, por ejemplo, que hay individuos que son escritores y que pretenden destruir el lenguaje[208]. Decimos, en suma

$$\vee x\,(Px \wedge Qx).$$

De igual modo, mediante el enunciado 'algunos vampiros son hemofílicos' estamos afirmando que hay algún x tal que x es vampiro y x es hemofílico.

Explicar por qué hemos elegido '$\vee$' para símbolo de cuantificador particular es tanto como explicar la relación que existe entre este cuantificador y la disyunción.

Tomemos el enunciado (8) de nuestra serie de ejemplos:

Algunas ciudades son inhabitables.

A nadie escapa que lo mejor para el género humano sería que no hubiera ciudad alguna. Consolémonos imaginando que sólo hubiera en el universo cuatro ciudades. El conjunto de las ciudades sería, pues, un

[208] Y que —añadiríamos como tercer predicado— por desgracia lo consiguen, aunque, por fortuna, no en el sentido en que lo pretenden.

conjunto de cuatro elementos: $\{a, b, c, d\}$. Decir, en este caso, que algunas ciudades son inhabitables sería como decir que o bien la ciudad a es inhabitable, o bien lo es la ciudad b, o bien la ciudad c o bien la ciudad d. Así pues, una expresión como '$\vee x\, Px$' será equivalente —cuando el conjunto de los x sea finito— a una disyunción de enunciados singulares que tendrá tantos elementos cuantos elementos tenga el conjunto que constituye el campo de valores de la variable. Y, en concreto, nuestro enunciado acerca de la inhabilidad de algunas ciudades,

$$\vee x\,(Cx \wedge Ix)$$

sería equivalente a la siguiente disyunción:

$$(Ca \wedge Ia) \vee (Cb \wedge Ib) \vee (Cc \wedge Ic) \vee (Cd \wedge Id).$$

Recordemos, sin embargo, que para que una disyunción de enunciados sea verdadera, tenga el número de miembros que tenga, basta con que lo sea uno solo de ellos. En consecuencia, el fragmento de lenguaje '$\vee x\, Px$' ha de leerse 'Hay al menos un x tal que...'.

La lógica y el mundo

Detengámonos ahora brevemente en la consideración de un problema que si bien, según algunos, carece de importancia para la lógica pura, alguna tiene para cuantos piensan que la lógica formal no ha de ser un lenguaje artificioso que sobrevuele, incontaminado, los lenguajes naturales.

Al cuantificador particular se le conoce también con el nombre de 'cuantificador *existencial*'.

¿Por qué? Porque al usarlo estamos afirmando la existencia de algo ('*Hay* al menos un x tal que...'). Porque al usarlo estamos comprometiéndonos a admitir que en el mundo se dan determinados entes: aquellos a los que se atribuye el predicado o predicados. En este sentido se ha podido decir que el cuantificador particular tiene *«alcance existencial»*, *«implicaciones ontológicas»*. Y así, por ejemplo, al decir

Algunas mareas son mareas muertas

estoy afirmando implícitamente que en el mundo se dan fenómenos llamados mareas. En efecto: aquel enunciado, analizado desde el punto de vista lógico, se reduciría a éste:

Hay al menos un x tal que x es una marea y x es muerta.

No así, se nos dice, en el caso del cuantificador universal. Y ello porque al hacer un enunciado de la forma

$$\wedge x\,(Px \rightarrow Qx)$$

no estoy afirmando en modo alguno que existan individuos de esos cuyo conjunto constituye el campo de valores de la variable x. Estoy diciendo, simplemente, que todo individuo que posea la propiedad designada por P posee por ende la propiedad designada por Q. Que *posea*. El mundo subjuntivo en que hemos conjugado el verbo 'poseer' señala el carácter hipotético —es decir, condicional— del enunciado. Al emplear el cuantificador universal estamos diciendo que para todo individuo x, *si* a ese individuo puede atribuírsele con verdad el predicado P, *entonces* también con verdad puede decirse de él el predicado Q. Que existan o no esos individuos es cuestión que para nada pertenece a la lógica como tal.

Así pues, al decir, por ejemplo,

Todos los fascistas usan daga con hoja de acero inoxidable

no estoy en modo alguno afirmando —ni implícitamente, ni explícitamente— que existan en el mundo fascistas. Igualmente, cuando alguien profiere el enunciado

Todos los miembros de la Sociedad de Eclécticos se caracterizan por su precaria formación intelectual

no está afirmando por implicación que existan miembros de la Sociedad de Eclécticos. Está sólo diciendo que, si los hay, se caracterizan por lo escasamente cultivado de su intelecto.

Peregrina pudiera antojarse esta afirmación a quien reflexione sobre su propia práctica como hablante de su lengua. Nadie, cabría pensar, dice nunca algo como «todas las pasiones del hombre son inútiles» a menos que crea que el hombre puede ser sujeto de pasiones, como nadie hay que diga «todos los espiritistas están afectados de privación sensorial» sin creer que realmente existan espiritistas [209].

A esto podría responderse, desde las sólidas posiciones de la lógica pura, con el siguiente argumento:

Hágase memoria de que los enunciados universales tienen la forma de un condicional. Y de que un condicional con antecedente falso (casos 0-1

---

[209] Borges ha explotado brillantemente esta extrañeza con fines literarios. Y así, dice en su relato *La busca de Averroes*: «Abulcásim decía haber alcanzado los reinos del imperio de Sin (de la China); sus detractores, con esa lógica peculiar que da el odio, juraba que nunca había pisado la China y que en los templos de ese país había blasfemado de Alá».

y 0-0 de la tabla de verdad) es siempre verdadero. Por tanto, dado un enunciado de la forma

$$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx),$$

el hecho de que no haya ningún *x* que tenga la propiedad *P* —es decir, el hecho de que ningún enunciado que constituya una ejemplificación o instanciación de '*Px*' ('*Pa*', '*Pb*', '*Pc*', etc.) sea verdadero— hace ya verdadero el condicional[210]. El hecho de que el conjunto de los *x* sea vacío no afecta a la verdad del condicional. Mejor dicho: la afecta, pero, por así decir, siempre para bien. Garantiza esa verdad.

La respuesta que cabría dar a este argumento es que, al esgrimirlo, el lógico formal no hace otra cosa que replegarse a su cálculo. En su cálculo, el condicional tiene un sentido perfectamente definido. Aceptado el condicional domesticado que el lógico nos ofrece, la interpretación que en el cálculo se hace de los enunciados universales es irreprochable. Puede reprochársele al lógico, bien es verdad, su desatención a los usos del lenguaje ordinario. Pero el lógico respondería que la lógica no es la lingüística, y que es asunto de esta última dar cuenta fiel de la práctica del hablante común. Y entonces se le podría responder al lógico que, en ese caso, carecen de credenciales las pretensiones que a menudo exhibe de estar proporcionando un análisis verdaderamente riguroso del lenguaje ordinario en su uso apofántico, esos aires de estar, como decíamos más atrás, «poniendo en limpio» el juego de lenguaje que consiste en hacer inferencias.

Nadie, sin embargo —ni el lógico consciente, ni el lingüista técnicamente bien preparado, ni el hablante sensato de su lengua—, podría desear esa ruptura. Y así, este último, por boca del segundo, intentaría quizá que el primero recapacitara sobre su propia actuación lingüística, diciéndole: Concedamos que el uso del cuantificador universal *no implica* afirmación alguna de existencia. Pero *presupone* esa existencia[211]. Al decir

Todas las obras de Herman Melville son muestras de realismo socialista

quizá —concedamos— no estamos afirmando por implicación que Herman Melville haya escrito obra alguna, pero, desde luego, estamos presuponiendo que así ha sido. Lejos de afirmar, como hace el lógico, que precisamente la no-existencia de individuos a los que se atribuye la primera propiedad garantiza la verdad de ese enunciado universal, habría que decir que es precisamente la existencia de tales individuos lo que hace posible que el tal

[210] Recuérdese que ésta era también la razón que dábamos en el capítulo anterior para afirmar que el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto.

[211] Cfr., como *locus* ya clásico, P. F. Strawson, *Introduction to Logical Theory*, Londres, Methuen, 1952, esp. págs. 174-9.

enunciado pueda ser verdadero o falso. Con otras palabras: es lo que hace que el tal enunciado pueda ser proferido con sentido. Nadie dice en serio «Todas mis esposas son feministas» a menos que sea polígamo.

Aún podría el lógico formal hallar respuesta para esto. Quizá las siguientes consideraciones podrían constituirla.

El hecho de que la lógica no sea —como señalaba Wittgenstein[212]— la ciencia *natural* del lenguaje, la ciencia que tiene al lenguaje como objeto propio, como objeto *formal*, en absoluto implica que los lógicos quieran —o puedan, o deban intentar— volver la espalda al lenguaje ordinario. Es en éste donde primariamente formulamos nuestros razonamientos. Y de él —en un intento de formalizarlo bajo ese respecto— parte la lógica. El hecho de que la lógica tome pie en el lenguaje ordinario no le obliga, sin embargo, a reproducir punto por punto todas las inflexiones del lenguaje ordinario en cuanto vehículo del razonamiento. Y ello es, para el lógico, una suerte, porque, habida cuenta de la necesidad —para estudiar adecuadamente el lenguaje— de hacerlo considerándolo como un complejísimo tipo de coducta que se da siempre entetejido con otros tipos de conducta no menos complejos, la lógica sería incapaz de consumar su intento. En la medida en que se constituye como el estudio de las condiciones ideales de validez del razonamiento, la lógica puede permitirse el lujo de retirarse a un lenguaje de laboratorio, en el que cabe prescindir, hasta cierto punto, del inabarcable contexto con el que los lingüistas están, por oficio, obligados a bregar. Un lujo caro, pues corre el riesgo de ver, así, mermada su importancia, reducida a la de una especie de juego no del todo intrascendente. Pero, por supuesto, un lujo agradable, en la medida en que la lógica queda así sustraída a las exigencias de recoger cuidadosamente, sin perder detalle, la trama del lenguaje natural en cuanto medio de expresión de argumentaciones.

En este supuesto, lo único que al lógico compete es aislar y analizar desde su particular punto de vista aquellas expresiones del lenguaje ordinario que, al pasar a formar parte de un razonamiento, pueden afectar de algún modo a su validez. Es obvio que entre esas expresiones se encuentran los enunciados universales.

Y ocurre que la lógica, dado el esquematismo que la constituye y le da alcance universal, tiene necesidad de retener, en cada tipo de expresiones, tan sólo aquello que todas ellas tienen en común: únicamente aquellos rasgos que, sin excepción, comparten.

Pensemos en expresiones de un determinado tipo: por ejemplo, en grupos de dos enunciados compuestos con la conjunción 'y'. Es evidente que en castellano la conjunción 'y' tiene múltiples usos: entre otros, un uso adversativo, que la hace equiparable a 'pero' o partículas afines ('les previne contra los riesgos de la filosofía y no me hicieron caso'); un uso, digamos, causal ('se puso a leer las obras completas de Louis

[212] *Philosophische Untersuchungen*, par. 81.

Lavelle y tuvo un desprendimiento de retina'); un uso «concesivo» ('no sería capaz de disparar contra Chomsky. Y eso que es un anarquista'), y otros muchos que nos excusamos de tipificar.

¿Qué tienen en común todos esos usos de la conjunción 'y'? Muy poco: que en todos ellos se yuxtapone una frese a otra ('... y ...'). Pues bien: es ese mínimo común lo que la lógica retiene y transfiere a su cálculo. La conectiva '$\wedge$' se limita a poner dos enunciados uno junto a otro, y a construir así un enunciado compuesto que será verdadero sólo si lo son sus dos miembros. Ni más, ni menos; aunque menos es imposible.

Vista así, es lógico que la conjunción tenga la propiedad conmutativa. Unir un enunciado a otro monta tanto como unir el segundo al primero[213].

El caso del condicional es, a este respecto, paradigmático. Cuando, en el lenguaje ordinario, decimos '*si* tal cosa, *entonces* tal otra', no estamos diciendo sencillamente (como pudiera inducir a pensar la equivalencia '$X \rightarrow Y =_{Df.} \neg(X \wedge \neg Y)$') que no es el caso que se dé lo primero y no se dé lo segundo. Sólo empleamos el condicional cuando pensamos que entre antecedente y consecuente hay una relación más intensa que ésa. Nadie —a menos que sea precisamente profesor de lógica y esté explicando las peculiaridades de su lenguaje profesional— dice algo como 'Si Kierkegaard era un filósofo lúdico, entonces Schopenhauer era un empirista lógico'. Nadie. Porque nadie pensaría que la primera afirmación es condición de la segunda. Lo primero cuando el contexto —es decir, entre otras cosas, el contenido, eso de lo que la lógica hace abstracción— indica la existencia de una relación que ni es ni se reduce a una relación entre valores de verdad. ¿Quién diría, por ejemplo, 'si muero, entonces Alfonso Martínez de Toledo escribió *Corbacho*' pensando que, puesto que el consecuente de ese condicional es verdadero, acaba de componer un enunciado que es verdad? ¿De qué le serviría enunciar un condicional verdadero si eso no le sirve para nada? Todo aquel suponiendo que no se dará lo primero sin que se dé lo segundo. Pero no lo profiere a menos que piense que, además, lo primero y lo segundo «tienen algo que ver».

Y, sin embargo, puesto que las reglas del lenguaje ordinario no impiden la formación de esos condicionales «ociosos», en los que no hay conexión «de sentido» entre antecedente y consecuente, el lógico se pregunta: ¿qué es lo que tienen en común todos los enunciados condicionales que cabe construir? Y se responde: que son falsos en el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso.

[213] Nótese, por otra parte, que el lenguaje ordinario tiene recursos para resistir esa inversión incluso en los casos en que el sentido de 'y' parece hacerla difícil: 'No me hicieron caso, y mira que los previne contra los riesgos de la filosofía'; 'Tuvo un desprendimiento de retina. Y es que se puso a leer las obras completas de Louis Lavelle'. Es

Volvamos con esta idea a la consideración de los enunciados universales. Cierto que, en los casos más frecuentes, el uso de un enunciado universal parece conllevar, si no una afirmación, sí una presuposición de la existencia de los individuos de que se trate. Al decir, por ejemplo,

Todos los hombres tienden por naturaleza al saber[214]

o

Todos los cometas están deshabitados

es difícil negar que se esté presuponiendo, respectivamente, la existencia de hombres y de cometas.

Pero hay casos más débiles. Hay enunciados como

El que dijera lo contrario, mentiría

que, más que presuponer la existencia de las entidades en cuestión —la existencia de personas que lleven la contraria al autor de ese enunciado—, se limitan a presuponer la posibilidad de esa existencia. O puede que ni siquiera a presuponerla, sino tan sólo a considerarla.

Innumerables ejemplos de ello podríamos presentar sin más que recorrer los códigos jurídicos o morales. De una norma como

El que atentare contra la propiedad privada de los medios de producción será severamente castigado

no puede decirse estrictamente que presuponga la existencia efectiva de partidarios de la colectivización. A lo sumo diríamos que presupone la posibilidad de que existan. E incluso, vista la cosa de otro modo, cabría afirmar que al hacer público un enunciado semejante se está tratando justamente de evitar que los haya[215].

Hay, pues, al lado de un uso, digamos, *fuerte* del cuantificador universal, usos *débiles* de esa partícula lógica. Y puesto que el análisis formal ha de retener únicamente el «mínimo común lógico»[216] de éste como de cada uno de los elementos del lenguaje ordinario en los que se concentra, y puesto que ese mínimo común a todos los usos del cuanti-

[214] Con esta frase se abre la *Metafísica* de Aristóteles.

[215] Mark Twain escribe, al comienzo de *The Adventures of Huckleberry Finn*, las siguientes palabras de advertencia (firmadas por «G. G., Comandante de Plaza»): «Aquellos que intenten descubrir motivo en este relato serán procesados; aquellos que intenten encontrar en él una moraleja, serán desterrados; aquellos que pretendan hallar argumento, serán fusilados». Samuel Clemens no está aquí afirmando que existan lectores tales. Está amenazando por *si* los hubiera.

[216] Es decir: el mínimo común lógicamente relevante.

ficador universal no incluye necesariamente —según parece— la implicación de existencia, la lógica contemporánea renuncia a que los enunciados universales tengan, por principio, alcance ontológico.

Pero decir que «por principio» no lo tienen sugiere ya que es el contexto al que la lógica se aplica el que determina en cada caso la conveniencia o la necesidad de suponérselo o negárselo.

El problema, sin embargo, dista de estar resuelto. Porque no se resuelve aduciendo —como hacen muchos lógicos empeñados en acendrar su disciplina— que el lenguaje lógico es un lenguaje con sus propias convenciones, que pueden muy bien no coincidir con las que gobiernan el uso del lenguaje ordinario. Y tampoco se solventa manteniendo —como han hecho algunos «filósofos del lenguaje ordinario»[217]— que el lenguaje cotidiano tiene, en cierta medida, su propia lógica, independiente de la lógica formal. Aunque a menudo han solido presentarse ambas posturas —la de los lógicos purísimos y la de los abogados de una presunta «lógica informal» del lenguaje ordinario— como posturas contrapuestas, bien se ve que, a la postre, ambas se complementan y vienen a dar en lo mismo: en la disociación entre lógica formal y lenguaje ordinario. Aquella, reducida a una teoría angélica del raciocinio, campando por sus respectos en un cielo sin nubes; y el lenguaje ordinario, abandonado por imposible.

Pretendíamos únicamente, con esta digresión, dar señal de los múltiples problemas filosóficos que en torno a la lógica formal concurren. Y que no se resuelven eludiéndolos, instalándose en la negativa a platearlos, sino haciéndoles frente: intentando desplegar el rigor de la lógica hasta lugares donde parece aconsejable su presencia. Probablemente eso suponga un cambio en el concepto de rigor lógico. Tanto mejor.

Por lo demás, aquí nos hemos limitado a sugerir, en un estilo deliberadamente «ingenuo», un posible planteamiento de este problema o conjunto de problemas. En el último capítulo del libro volveremos sobre estas cuestiones lógico-filosóficas proporcionando mayores detalles.

Lógica de primer orden y lógica de orden superior

Entramos, pues, en un nuevo apartado de la lógica. Su nombre: '*lógica de predicados*' o '*lógica cuantificacional*'.

Los predicados los hemos dividido en dos tipos: predicados monádicos y predicados poliádicos. Paralelamente, dividiremos la lógica de predicados en dos secciones fundamentales: Lógica de los predicados monádicos y Lógica de los predicados poliádicos.

[217] Cfr., por ejemplo, G. Ryle: *Dilemmas*. The Tarner Lectures, 1953. Cambridge at the University Press, 1954. P. F. Strawson, *Introduction to Logical Theory*, cit.

Una expresión escrita en el lenguaje de la lógica de los predicados monádicos sería, por ejemplo, ésta:

$$\bigwedge x\,[(Px \wedge \neg Qx) \rightarrow Rx]$$

que cabría ejemplificar en el siguiente enunciado:

Todos los eremitas que no tienen televisión se aburren mortalmente

En cambio, la expresión

$$\bigwedge x \bigvee y\,[(Px \wedge Qy) \rightarrow (Rxy \wedge Syx)]$$

que podría ser el esquema de un enunciado como

Todos los sádicos encuentran siempre una masoquista que los sabe apreciar como se merecen[218]

pertenecería a la lógica de los predicados poliádicos.

Ahora bien: por el momento nos hemos limitado a cuantificar las variables individuales. ¿Por qué no cuantificar también las letras de predicado? En el lenguaje ordinario lo hacemos a menudo. Decimos, por ejemplo,

Todos los múltiplos de 8 comparten al menos una propiedad

o, en símbolos,

$$\bigvee P \bigwedge x\,(Mxa \rightarrow Px)$$[219];

y también

Hay un rasgo que todos los problemas filosóficos tienen en común

expresión que podríamos esquematizar así:

$$\bigvee P \bigwedge x\,(Qx \rightarrow Px)$$[220]

En el primer capítulo de este libro citábamos una frase que Borges atribuía a Averroes: «Un famoso poeta es menos inventor que descubridor». Y también un aforismo de Wittgenstein: «El matemático es un inventor,

[218] Es decir: Para todo *x*, hay algún *y* tal que si *x* es sádico e *y* masoquista, entonces *x* encuentra a *y*, e *y* sabe apreciar a *x* como se merece.

[219] Es decir: 'Hay al menos una propiedad *P* tal que, para todo *x*, si *x* es múltiplo de 8, entonces *x* la posee'.

[220] Es decir: 'Hay al menos una propiedad *P* tal que, para todo *x*, si *x* es problema filosófico, entonces *x* posee *P*'.

no un descubridor». Quiere ello decir —si es que aceptamos ambas caracterizaciones— que el matemático y el poeta tienen una —al menos una— propiedad en común. Dicho de otro modo:

$$\bigvee P \bigwedge x \bigwedge y\,[(Qx \wedge Ry) \rightarrow (Px \wedge Py)]$$ [221]

Pues bien: aquel nivel de la lógica de predicados en el que sólo se cuantifican variables individuales recibe el nombre de '*lógica de predicados de primer orden*'. En un segundo nivel —*lógica de predicados de segundo orden*— se examinaría la validez de aquellos razonamientos que, para su esquematización, requieren la cuantificación de predicados de individuo.

Pero podríamos seguir ascendiendo. Porque no sólo hay individuos y predicados de individuos. Hay también predicados de predicados de individuos. Y nada nos impide cuantificarlos. Al hacerlo habríamos entrado en la *lógica de predicados de tercer orden*. Y al cuantificar predicados de predicados de predicados de individuo nos hallaríamos en *lógica de predicados de cuarto orden*. Y así sucesivamente[222].

Sin embargo, se suele hablar, sin más, de, por una parte, «lógica de predicados de primer orden», y, por otra parte, «*lógica de predicados de orden superior*», que integraría a todas las de orden superior al primero.

Así, pues, y combinando ambos criterios de división —monádica/poliádica, y de primer orden/de orden superior— tendríamos el siguiente cuadro:

- Lógica de predicados
  - de primer orden
    - monádicos[223]
    - poliádicos[224]
  - de orden superior
    - monádicos[225]
    - poliádicos[226]

[221] Es decir: 'Hay al menos una propiedad P tal que, para todo x y para todo y, si x es matemático e y es poeta, entonces x posee esa propiedad e y también la posee'.

[222] Por ejemplo: 'ser hermano de' es un predicado —poliádico— de individuos. 'Ser una relación de parentesco' es un predicado de predicados de individuo (No es un predicado de individuo, porque de un individuo no puede decirse que sea una relación de parentesco). 'Ser un concepto de la antropología' se puede emplear como predicado de predicados de predicados de individuo, diciendo, por ejemplo «'relación de parentesco' es un concepto de la antropología». Etc.

[223] Ejemplo de expresión de este cálculo: $\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$.

[224] '$\bigwedge x \bigwedge y\,(Pxy \rightarrow Qxy)$' sería, por ejemplo, un enunciado de la lógica cuantificacional poliádica de primer orden.

[225] '$\bigvee P \bigwedge x\,(Qx \rightarrow Px)$' sería un esquema cuantificacional de la lógica de predicados monádicos de orden superior (concretamente, de segundo orden).

[226] A la lógica de predicados poliádicos de orden superior pertenecería la expresión '$\bigwedge P \bigwedge x \bigvee y\,[(Qxy \wedge Ryx) \rightarrow (Pxy)]$'.

B) La lógica de los predicados monádicos [227*]

Los cuatro modelos básicos de enunciado

De expresiones de tres tipos habremos de ocuparnos bajo este epígrafe. De expresiones como

$$Pa,\ Qa,\ \text{etc.}$$ [228*]

De expresiones de la forma

$$\bigwedge x\,Px, \quad \bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx), \quad \bigwedge x\,(\neg Qx \vee Px)$$

Y de expresiones como

$$\bigvee x\,Px, \quad \bigvee x\,(Px \wedge Qx), \quad \bigvee x\,(Px \vee Qx)$$

[227*] La lógica de clases no es sólo otra interpretación posible del cálculo que, en el texto principal del capítulo II, hemos interpretado como de enunciados. Es también, en parte, otra manera de interpretar el cálculo que da forma a la lógica de predicados monádicos. De ahí que vuelvan ahora las notas con asterisco.

[228*] 'Pa', 'Qa', etc., han sido presentadas, en las páginas precedentes, como formas de simbolizar enunciados del tipo de 'Gerald Ford es un gran pensador político' o 'Goebbels era cojo'. Quiere ello decir que hasta el momento hemos analizado esos enunciados como si lo que en ellos se afirmara fuera la posesión, por parte de un individuo dado, de un determinado atributo. Cabría, sin embargo, la posibilidad de interpretarlos de otra manera. A saber: como si lo que en ellos se enunciara fuera la pertenencia de un individuo a una cierta clase.

En el capítulo anterior dábamos una caracterización «ingenua» de la noción de clase. Decíamos allí que, dada una propiedad cualquiera, era posible construir la clase de todas aquellas entidades que compartieran esa propiedad. Pues bien: el supuesto —que intuitivamente podría parecer aceptable— de que para *toda* propiedad existe la clase de los individuos que la poseen permite la formación de contradicciones. Ello bien entendido, podemos, sin embargo, para nuestros presentes propósitos, decir lo siguiente:

A expresiones funcionales de la forma

x es un indio bororo

les llamábamos «enunciados abiertos». Los argumentos de la función eran nombres de individuo. Los valores de la función, enunciados (verdaderos o falsos). Pues bien: todos aquellos individuos cuyo nombre, escrito en el lugar de x, hace que ese enunciado abierto se convierta en un enunciado (cerrado) verdadero, componen una clase: la clase de los indios bororo. De igual modo, dado un enunciado abierto como 'x es un anarco-dadá-epistemólogo', habrá una clase de individuos, la clase de los anarco-dadá-epistemólogos, cuyos nombres —el de Paul Feyerabend, el primero—, escritos en sustitución de x, harán que ese ununciado en potencia se convierta en enunciado verdadero.

Las clases —dicho sea cortando por lo sano disputas milenarias— son entidades *abstractas*. Con el empleo de este venerable adjetivo filosófico quiere decirse lo siguiente: que, mientras que los individuos concretos pueden en principio percibirse mediante todos o alguno de los cinco sentidos, las clases no están dadas a la percepción, sino que son el fruto de una determinada operación intelectual. A esta operación ha venido llamándosele '*abstracción de clases*'. ¿En qué consiste esa operación? Consiste en, dado un predicado P, imaginar reunidos en torno suyo a todos los individuos de los que P puede ser predicado

En suma: de enunciados, ora singulares, ora universales, ora particulares en los que, una vez apropiadamente analizados, se encuenten única y exclusivamente predicados monádicos.

Si olvidamos por el momento los enunciados singulares, restan dos tipos de enunciados: enunciados universales y enunciados particulares.

Pero mejor sería decir que son *cuatro* los tipos de enunciado con que podemos encontrarnos. En efecto: si hacemos intervenir la negación tendremos: 1) Enunciados universales afirmativos; 2) Enunciados universales negativos; 3) Enunciados particulares afirmativos, y 4) Enunciados particulares negativos.

---

con verdad. Recurriendo a la elocuencia de los símbolos, diremos, en resumen, que una expresión de la forma

$$\{x \mid Px\}$$

ha de leerse: 'la clase de todos los x tales que Px'; es decir, la clase de todos los x tales que hacen verdadero el enunciado abierto 'Px'.

En el capítulo II nos hemos ocupado de las relaciones entre clases (clases que se suman o se solapan, que se incluyen en otras clases, que son idénticas, etc.). La lógica de clases ha de pasar ahora —si es que queremos seguir manteniendo una interpretación paralela del cálculo— a considerar también las relaciones entre las clases y sus *elementos* o *miembros* (que es así como se llama a los individuos que satisfacen los requisitos para ser socios de una clase). De un individuo se dice, pues, que pertenece a, o es un miembro de, o es un elemento de una determinada clase. Desde Giuseppe Peano (1858-1932), el símbolo que se utiliza para designar la relación de pertenencia es '∈' (inicial de '*ἐστί*', forma de la tercera persona del singular del presente de indicativo del verbo '*εἰμί*', 'ser'). Así, pues, una expresión cómo

$$a \in A$$

se leerá: 'El individuo a pertenece a [o es un elemento o miembro de] la clase A'.

Quede claro, entonces, que, por ejemplo, la expresión

Armand-Dubois era fracmasón

puede ser interpretada como

Armand-Dubois tiene la propiedad de ser francmasón

o bien como

Armand-Dubois es un miembro de la clase de los francmasones.

* * *

Ahora que disponemos ya de los recursos simbólicos suficientes, vamos a definir de nuevo las operaciones con clases:

Complemento de una clase (de la clase A, por ejemplo):

$$-A =_{Df.} \{x \mid x \notin A\} \quad [\text{donde } `x \notin A\text{' equivale a '}\neg (x \in A)\text{'}]$$

¿Cómo se representarían en el lenguaje lógico estos cuatro tipos de enunciados en sus formas más simples? Así:

Universal afirmativo	$\bigwedge x\, Px$	[Todos los x son P]
Universal negativo	$\bigwedge x (\neg Px)$	[Ningún x es P][229]
Particular afirmativo	$\bigvee x\, Px$	[Algún x es P]
Particular negativo	$\bigvee x (\neg Px)$	[Algún x no es P][230]

Ahora bien: estos modelos valen para enunciados cuyo universo del discurso esté especificado. Estas son, efectivamente, las formas más simples de enunciado, pero si sabemos quiénes son esos x de los que se habla.

Vamos a ver, entonces, cómo se representarían, sobre un universo del discurso no determinado con anterioridad, esos cuatro modelos de proposición.

Antes, sin embargo, hemos de detenos en el examen de la relaciones que los cuantificadores mantienen entre sí a través de la negación.

Sea el siguiente esquema:

$$\neg \bigwedge x\, Px$$

Su lectura nos dice: «No todos los x tienen la propiedad P». Y, ¿no equivale esto a decir: «Hay algún x que no tiene la propiedad P»?

La clase complemento de una clase dada es la clase de todos los x tales que no pertenecen a esa clase.

Unión de clases (de las clases A y B, por ejemplo):

$$A \cup B =_{Df.} \{x \mid (x \in A \vee x \in B)\}$$

Intersección de clases:

$$A \cap B =_{Df.} \{x \mid (x \in A \wedge x \in B)\}$$

Inclusión de clases:

$$A \subset B =_{Df.} \bigwedge x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Igualdad o identidad de clases:

$$A = B =_{Df.} \bigwedge x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

La simbolización deja perfectamente clara la diferencia entre operaciones como '−', '∪' o '∩', que componen nombres de clases, y operaciones como '⊂' o '=', que componen enunciados sobre clases.

Recuérdese, por lo demás, que *clase vacía* es aquella a la que no pertenece ningún individuo (normalmente, dentro de un determinado universo del discurso), y *clase universal*, aquella a la que pertenecen todos los individuos de un determinado universo del discurso.

[229] Literalmente: «Todo x es no-P».

[230] Literalmente: «Algún x es no-P».

Parece que sí. Parece que el esquema anteriormente reproducido equivale a este otro:

$$\bigvee x \neg Px$$

Examinemos el otro caso. Una expresión de la forma

$$\bigwedge x \neg Px$$

se leería: «Todos los x carecen de la propiedad P [poseen la propiedad no-P»]. No es preciso derrochar perspicacia para percatarse de que ese enunciado es equivalente a este otro: «No hay ningún x que posea la propiedad P»; o, en símbolos,

$$\neg \bigvee x\, Px$$ [231]

Todo esto podría resumirse diciendo que uno cualquiera de los cuantificadores seguido de la negación es intercambiable por el otro cuantificador precedido de ella. Y viceversa. Para los casos más simples —esto es, para aquellos esquemas en los que aparece un solo predicado una sola vez— cabe decir, en términos de puras secuencias de símbolos, que uno de los cuantificadores con la negación a su izquierda puede ser sustituido por el otro cuantificador con la negación a su derecha —o al revés—, y la expresión resultante será equivalente a la primitiva. Así pues,

$$(1)\quad \neg \bigwedge x\, Px \leftrightarrow \bigvee x \neg Px$$
$$(2)\quad \neg \bigvee x\, Px \leftrightarrow \bigwedge x \neg Px$$

Pero aún hay más. Tomemos, por ejemplo, el esquema

$$\neg \bigvee x \neg Px$$

que se leería: «No hay ningún x que posea la propiedad no-P», o, de mejor manera, «No hay ningún x que no sea P». Ahora bien: eso es tanto como decir: «Todos los x son P»; en símbolos,

$$\bigwedge x\, Px$$

De igual manera, una expresión como

$$\neg \bigwedge x \neg Px$$

[231] El lector sabrá, sin duda, superar la pequeña dificultad que supone el hecho de que a veces —y ésta es una—, en castellano, la repetición de la negación, lejos de anular la negación primitiva (como ocurre en lógica, donde $\neg\neg X =_{df.} X$), la refuerza: «*No* hay *ningún* x tal que...', cuando en rigor bastaría con decir: «No hay *algún* x ...»

(es decir: «No todos los x carecen de la propiedad P») es equivalente a la expresión

$$\bigvee x\, Px$$

(Es decir: «Hay algún x que tiene la propiedad P»).

En suma:

$$(3)\quad \neg \bigvee x \neg Px \leftrightarrow \bigwedge x\, Px$$
$$(4)\quad \neg \bigwedge x \neg Px \leftrightarrow \bigvee x\, Px$$

Es decir: gracias a la negación, cabe definir uno cualquiera de los cuantificadores en términos del otro. Ya sabemos de qué tipo de definición se trata: de una definición *contextual*. En todos los contextos en los que aparezca el cuantificador universal, por ejemplo, podemos borrarlo y escribir en su lugar el cuantificador particular flanqueado de negaciones.

Hemos visto hace un momento cómo representar en símbolos los cuatro modelos básicos de enunciado cuando éstos tienen, respectivamente, la forma: «Todos *ellos* son P», «Ninguno de *ellos* es P», «Alguno de *ellos* es P» y «Alguno de *ellos* no es P» [232]. Ahora bien: hay enunciados universales afirmativos como «Todos los hombres son inmortales»; enunciados universales negativos como «Ningún habitante de Neptuno es esquizoide»; particulares afirmativos como «Algunas ballenas son blancas»; y particulares negativos como «Algunos ríos no suenan». En todos esos caso el universo del discurso viene especificado en el seno del propio enunciado. ¿Cuáles serán, entonces, las formas más simples de proposición *cuando en ellas está explícito el universo del discurso?*

Los enunciados universales afirmativos tendrán, como bien sabemos, esta forma:

$$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$$ [233*]

[232] Donde el pronombre 'ellos' sustituye el nombre del conjunto-universo de los x, que se da por especificado.

[233*] Repárese en que un enunciado universal afirmativo así formulado corresponde al enunciado de una inclusión de clases.

Quiere decirse, entonces, que un enunciado como «Todos los árboles son agradables» puede esquematizarse, bien de este modo:

$$\bigwedge x\,(Ax \rightarrow Gx)$$

bien de este otro:

$$A \subset B$$

(donde $A = \{x \mid Ax\}$ y $B = \{x \mid Gx\}$).

¿Cómo esquematizar la estructura básica de los enunciados universales negativos? Podríamos sentirnos tentados a decir que para ello bastaría simplemente con negar el esquema anterior:

$$\neg \bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$$

Pero no. Porque eso sería tanto como decir que *no todos* los que poseen la propiedad *P* poseen la propiedad *Q*. Y 'no todos' significa, como acabamos de ver, 'algunos no'. Un esquema que empezara con '$\neg \bigwedge x$' sería un esquema de enunciados particulares[234], y no universales; y universal ha de ser el que corresponda a enunciados que empiezan por 'ningún'.

Los enunciados universales negativos responderían al modelo siguiente:

$$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx)^{235*}$$

---

[234] En efecto: como veremos, al igual que '$\neg (p \rightarrow q)$' equivale a '$p \wedge \neg q$', así también '$\neg \bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$' es equivalente a '$\bigvee x\,(Px \wedge \neg Qx)$'.

[235*] ¿Qué correspondería, en lógica de clases, a un enunciado de este tipo? Correspondería un enunciado como éste:

$$A \subset -B.$$

Cuando afirmemos que ningún individuo que posee tal propiedad posee también tal otra es como si estuviéramos afirmando que ningún individuo que sea miembro de una determinada clase es miembro de otra clase determinada. Ahora bien: si no lo es de esta última, forzosamente habrá de serlo de sus clases complemento. En efecto: entre una clase y su complemento abarcan todo el universo del discurso. Por tanto,

$$A \subset -B =_{Df.} \bigwedge x\,(x \in A \rightarrow x \notin B).$$

Definamos la noción de '*clases mutuamente excluyentes*'. Dos clases (*A* y *B*, por ejemplo) son mutuamente excluyentes cuando no tienen ningún miembro en común. Es decir, cuando,

$$\neg \bigvee x\,(x \in A \wedge x \in B).$$

Ahora bien: esto, según se ha visto, equivale a

$$\bigwedge x \neg (x \in A \wedge x \in B)$$

Lo cual, a su vez —en virtud de la definición de la conjunción en términos de disyunción con ayuda de la negación— se puede transformar en

$$\bigwedge x\,(x \notin A \vee x \notin B)$$

y, puesto que una disyunción con el primer miembro negado equivale a un condicional, venimos a dar en

$$\bigwedge x\,(x \in A \rightarrow x \notin B).$$

Cabría decir asimismo que dos clases son mutuamente excluyentes cuando su intersección es la clase vacía. No hay ningún individuo que sea a la vez miembro de las dos

Es decir: «Para todo *x*, si *x* es *P*, entonces *x* es no-*Q*». O, lo que es lo mismo, «Ningún *x* que tenga la propiedad designada por el predicado *P* tiene la propiedad designada por el predicado *Q*».

Los enunciados particulares afirmativos tendrán esta forma:

$$\bigvee x\,(Px \wedge Qx)^{236*}$$

(Es decir: «Hay algunos *x* que son a la vez *P* y *Q*»).

A los enunciados particulares negativos, en cuarto lugar, correspondería este esquema básico:

$$\bigvee x\,(Px \wedge \neg Qx)^{237*}$$

La siguiente tabla presenta en resumen los cuatro tipos de enunciado de la lógica de predicados monádicos de primer orden, con y sin especificación del universo del discurso, respectivamente:

[236*] Traducido a lógica de clases, un enunciado de este este tipo querría decir que la intersección de dos determinadas clases no es vacía. Afirmar «Algunos erasmistas eran españoles» es tanto como decir que la clase de los erasmistas y la clase de los españoles (de todas las épocas) tienen al menos un miembro en común:

$$A \cap B \neq \phi$$

O, dicho de otro modo,

$$\bigvee x\,(x \in A \wedge x \in B).$$

[237*] Para entender qué corresponde en lógica de clases a un enunciado particular negativo es necesario definir una noción nueva: la de '*diferencia*' de clases. Llamemos diferencia de la clase *A* con respecto a la clase *B* (en símbolos, *A-B*) a la clase formada por todos aquellos individuos que son miembros de *A y no* son miembros de *B*:

$$A - B =_{Df.} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

(Repárese en que la diferencia de clases, a semejanza del complemento, la unión y la intersección, es una operación que sirve para componer símbolos de clase, y no, como la inclusión o la igualdad, para formar enunciados acerca de clases).

Pues bien: el esquema

$$\bigvee x\,(Px \wedge \neg Qx)$$

equivaldría a este otro:

$$\bigvee x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

o, si se prefiere, a la afirmación de que la (clase) diferencia de *A* con respecto a *B* no es vacía:

$$A - B \neq \phi$$

Universal afirmativo $\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$	Universal negativo $\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$
Particular afirmativo $\bigvee x\,(Px \wedge Qx)$	Particular negativo $\bigvee x\,(Px \wedge \neg Qx)$

Universal afirmativo $\bigwedge x\, Px$	Universal negativo $\bigwedge x \neg Px$
Particular afirmativo $\bigvee x\, Px$	Particular negativo $\bigvee x \neg Px$

Problemas de traducción

Antes de proseguir, adiestrémonos en la resolución de algunos de los problemas que presenta la traducción de expresiones del lenguaje ordinario al lenguaje de la lógica de predicados monádicos.

Hay, ciertamente, expresiones que se dejan llevar al simbolismo sin mayores dificultades. Para nadie que haya llegado hasta aquí leyendo supondrá un problema, por ejemplo, esquematizar lógicamente el enunciado

Ningún emperador es odontólogo (Carroll)

Es evidente que la forma apropiada de representarlo sería ésta:

$$\bigwedge x\,(Ex \rightarrow \neg Ox)^{238*}$$

Tampoco se requiere especial pericia para trazar el esquema lógico del enunciado

Algunos gatos no saben silbar (Carroll),

que sería

$$\bigvee x\,(Gx \wedge \neg Sx)$$

238* O bien, estipulando que la clase A es la de los emperadores y la clase B la de los odontólogos:

$$A \subset -B,$$

que equivale a

$$\bigwedge x\,(x \in A \rightarrow x \notin B).$$

El aumento del número de predicados no supone tampoco una complejidad difícilmente salvable. El enunciado

Hay hombres que ni son libres ni sienten ningún deseo de serlo

quedaría, en símbolos, así:

$$\bigvee x\,(Hx \wedge \neg Lx \wedge \neg Dx)^{239*}$$

[Es decir: 'Hay algún x tal que x es hombre, y x no es libre, y x no siente ningún deseo de ser libre']

Y el enunciado

El alma enamorada es alma blanda, mansa, humilde y paciente (San Juan de la Cruz)

se reduciría, tras su tránsito por la lógica, a esto

$$\bigwedge x\,[Ex \rightarrow (Bx \wedge Mx \wedge Hx \wedge Px)]^{240,\ 241*}$$

Por fortuna, es imposible ofrecer un conjunto de reglas que otorgue a quien las aplique la seguridad de que sus versiones simbólicas de enunciados del lenguaje natural van a ser correctas. ¿Razones? Las mismas, pero a mayor abundamiento, que aducíamos a propósito de la esquematización del lenguaje usual en lógica de enunciados. La negación lógica es —al menos a este nivel en que estamos— una, y muchas son, en cambio, las formas de decir 'no' a una afirmación hecha en el lenguaje cotidiano. Son varias, asimismo, las maneras de expresar en el lenguaje de todos los días esa conexión entre enunciados que en el lenguaje lógico representamos con '→'. En suma: la relación, decíamos, que hay entre cada conectiva y su trasunto aproximado en el «lenguaje de la vida» (Frege) es una relación de uno a muchos. Otro tanto ocurre, como hemos visto páginas atrás, con cada uno de los cuantificadores: no hay, por ejemplo, en el lenguaje ordinario, una única forma

239* En lógica de clases:

$$\bigvee x\,(x \in A \wedge x \in -B \wedge x \in -C).$$

240 Nótese que, para abreviar, hemos dado por supuesto que el universo del discurso es el conjunto de las almas ('Para todo x, si x es un alma enamorada ...'). Podríamos, sin embargo, haberlo especificado: 'Para todo x, si x es un alma y x está enamorada ...'.

241* En lógica de clases:

$$A \subset (B \cap C \cap D \cap E)$$

o, por distribución,

$$(A \subset B) \wedge (A \subset C) \wedge (A \subset D) \wedge (A \subset E).$$

de expresar la generalidad. Y así, puesto que para traducir enunciados del castellano a la lógica de predicados monádicos habrá, en general, que manejar a la vez conectivas y cuantificadores, las dificultades se acumulan multiplicándose. Siempre es difícil —nunca es mecánica— la tarea de reducir lo multiforme a uniformidad. Cuando lo multiforme —el lenguaje natural— lo es hasta (o hacia) el infinito, y cuando los uniformes son varios —es decir, cuando son varios los moldes lógicos en que simultáneamente hemos de hacer encajar los enunciados «libremente» proferidos— la tarea se hace más delicada: la simbolización, encomendada a la sensibilidad lingüística y a la pericia lógica del simbolizador, se torna saludablemente discutible (a más de resultar indiscutiblemente empobrecedora de los textos a simbolizar).

Que la de traducir a símbolos lógicos no es una labor puramente mecánica se echa de ver sin más que recordar lo que es ya un lugar común en la lingüística contemporánea: el carácter creativo del lenguaje, la posibilidad que el lenguaje ofrece a quienes lo hablan de hacer con él lo que, desde su condición de seres finitos, quieran. Pensemos, por ejemplo, en enunciados literarios:

Son los apodos sutilezas prontas (Gracián)
Humanas criaturas hay capaces / de residir en esencial acorde (J. Guillén)

Para la esquematización de estos enunciados —una tarea no sólo triste, sino innecesaria, a no ser (como lo es aquí) a título de irónico tributo a nuestro propósito didáctico— se precisa algo más que saber lógica. Hace falta saber castellano: es decir, hace falta saber reaccionar ante los imprevistos que el uso del castellano nos reserva. Esa capacidad de reacción nos permite identificar el primero de esos enunciados como universal afirmativo, y como particular afirmativo el segundo. Y simbolizarlos así:

$\wedge x\,[Ax \rightarrow (Sx \wedge Px)]$ [O bien: '$\wedge x\,(Ax \rightarrow Sx)$', con '*S*' esquematizando 'ser una sutileza pronta')[242*]].

$\vee x\,(Hx \wedge Cx)$[243*]

Hasta el momento, los enunciados cuya esquematización hemos emprendido como ejercicio no han presentado dificultades de monta. Todos ellos eran tan sólo leves variaciones de alguno de los cuatro modelos fundamentales de eunciado. El lenguaje natural, sin embargo, alberga construcciones que exigen de nosotros mayor sutileza en la traducción: algunas hay, incluso, que constituyen para el traductor verdaderas trampas.

[242*] En lógica de clases, $A \subset (B \cap C)$, o, sencillamente, $A \subset B$, donde *A* es la clase de los apodos y *B* la de las sutilezas prontas.

No faltaría, sin embargo, quien entendiera la afirmación de Gracián como una *definición* de los apodos. En ese sentido, habría que reemplazar el condicional por el bicondicional, y en lógica de clases, el signo de inclusión por el de igualdad.

[243*] Es decir: $\vee x\,[x \in (A \cap B)]$.

Supongamos, por ejemplo, que alguien profiere el siguiente enunciado:

Nadie es verdaderamente revolucionario a menos que sea antistalinista

Es improbable que haya quien se sienta tentado a esquematizar este enunciado del siguiente modo:

$\wedge x\,(Ax \rightarrow Rx)$ ['Para todo *x*, si *x* es anti-stalinista, entonces *x* es verdaderamente revolucionario'] [244*].

Sería, en efecto, un error. Porque no es eso lo que en el enunciado original se dice. No se dice en el enunciado que el rechazo del stalinismo sea condición suficiente para dar a alguien el título de verdadero revolucionario. Lo que se afirma es que para que alguien pueda merecer tal nombre es condición necesaria la condena, por su parte, del stalinismo.

Parece, entonces, que el enunciado en cuestión debería esquematizarse de esta otra manera:

$\wedge x\,(\neg Ax \rightarrow \neg Rx)$[245*] ['Todo aquel que no sea anti-stalinista no es verdaderamente revolucionario'].

O bien, transformando la expresión mediante la Regla de Contraposición del condicional, así:

$\wedge x\,(Rx \rightarrow Ax)$[246*, 247] ['Todos los verdaderos revolucionarios son anti-stalinistas'].

[244*] Si convenimos en que *A* sea la clase de los anti-stalinistas y *B* la de los verdaderos revolucionarios, tendremos

$$A \subset B.$$

[245*] $-A \subset -B$.

[246*] $B \subset A$.

A partir de este instante, y por no sobrecargar la exposición, sólo presentaremos las esquematizaciones alternativas en lógica de clases en aquellos casos en que no sean enteramente triviales.

[247] Nótese que tampoco sería correcto en este ejemplo echar mano del bicondicional

Otro tanto cabría decir del enunciado

Nadie entraba en la Academia de Platón a menos que supiera geometría.

Sería un error formalizarlo así:

$\bigwedge x\,(Gx \rightarrow Ex)$ ['Para todo x, si x sabía geometría, entonces x entraba en la Academia de Platón'].

Porque eso lo que dice es que todos los conocedores de la geometría que vivieron mientras existió la Academia entraban en ella. Lo que habría que escribir es

$$\bigwedge x\,(\neg\, Gx \rightarrow \neg\, Ex),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\bigwedge x\,(Ex \rightarrow Gx)$$

Veamos otro ejemplo similar en estructura:

Nadie más que los fascistas oligofrénicos creen en el carácter revolucionario del fascismo.

Si lo esquematizáramos diciendo

$$\bigwedge x\,[(Fx \wedge Ox) \rightarrow Cx]$$

estaríamos diciendo que todos los fascistas oligofránicos creen en el carácter revolucionario del fascismo. Y ese sería un enunciado distinto del que estamos intentando traducir. La traducción correcta podría ser esta otra:

$$\bigwedge x\,[Cx \rightarrow (Fx \wedge Ox)],$$

---

y decir

$$\bigwedge x\,(Rx \leftrightarrow Ax)$$

porque eso es tanto como decir 'Todos los verdaderos revolucionarios son anti-stalinistas, *y todos los anti-stalinistas son verdaderos revolucionarios*'. Y decir esto último es ya decir demasiado.

que dice: 'Para todo x, si x cree en el carácter revolucionario del fascismo, entonces es que x es un fascista, y, además, oligofrénico'.

También en este caso —y quizá con alguna mayor justificación que en el ejemplo de los anti-stalinistas— podría pensarse que en rigor el enunciado dice dos cosas: que todos los fascistas oligofrénicos creen en el carácter revolucionario del fascismo y que todos los que creen en el carácter revolucionario del fascismo son fascistas oligofrénicos. Es decir:

$$\bigwedge x\,[(Fx \wedge Ox) \rightarrow Cx] \wedge \bigwedge x\,[Cx \rightarrow (Fx \wedge Ox)]$$

o bien, puesto que se trata de una conjunción de condicionales,

$$\bigwedge x\,[(Fx \wedge Ox) \leftrightarrow Cx]$$

Dicho de otro modo: todos y sólo los fascistas oligofrénicos creen en el carácter revolucionario del fascismo.

Esta interpretación se ve abonada por el hecho de que la expresión 'Nadie más que los ...' —que aparece en el enunciado inicial— tiene, entre sus equivalentes, 'Nadie sino los ...', 'Unicamente los ...' y 'Sólo los ...'.

Pero también se ve seriamente afectada cuando la constrastamos con el sentido que parece tener ese enunciado inicial. El enunciado inicial afirma —en nuestra opinión— que la clase de los que creen que el fascismo es revolucionario está formada exclusivamente por fascistas oligofrénicos[248*], pero en modo alguno dice que *todos* los fascistas oligofrénicos formen parte de esa clase[249*]. Podría haber —es seguro que hay— fascistas tan oligofrénicos que ni siquiera saben qué es el fascismo.

El habla coloquial puede vernir aquí en nuestra ayuda. En efecto: alguien podría parafrasear el enunciado original diciendo: «*Se necesita* ser un fascista y, además, ser oligofrénico, para creer que el fascismo es revolucionario».

Ahora bien: hemos caracterizado los enunciados condicionales como aquellos en los que se afirma que el antecedente es condición *suficiente* del consecuente. Este es el momento de añadir que en los enunciados condicionales se afirma también que *el consecuente es condición necesaria* del antecedente.

Y eso es exactamente lo que decimos al decir

$$\bigwedge x\,[Cx \rightarrow (Fx \wedge Ox)]$$

Decimos que hay que ser fascista, amén de oligofrénico, para creerse que el fascismo supone una revolución —en el buen sentido de la palabra.

248* Dicho de otro modo: que la clase de los que creen que el fascismo es revolucionario (llamémosla clase 'A') está incluida en la de los fascistas oligofrénicos ('B'): $A \subset B$.

249* En modo alguno dice que $B \subset A$.

Consideremos de nuevo el problema a través de otro ejemplo en el que, por intervenir también la partícula 'sólo', es también grande la tentación de traducirlo como un bicondicional:

Sólo los seres humanos compran pólizas

De acuerdo con la interpretación bicondicionalista, el esquema de este enunciado sería

$$\wedge x\,(Hx \leftrightarrow Cx)$$

Es decir: 'si y sólo si x es un ser humano, entonces x compra pólizas'. O, desplegando los condicionales contraídos en el bicondicional, 'Todos los seres humanos compran pólizas y todos los que compran pólizas son seres humanos'.

Ahora bien: mientras que el enunciado original es a todas luces verdadero, el bicondicional que aspira a constituir su correcta traducción no lo es. Porque ese bicondicional es una conjunción uno de cuyos miembros es falso. No es cierto, en efecto, que todos los seres humanos compren pólizas.

Piénsese que un criterio para determinar la corrección de nuestras versiones simbólicas podría ser el siguiente: si cabe imaginar circunstancias que hagan verdero el enunciado original y falsa su pretendida traducción, entonces es que esa traducción es incorrecta.

Así, en este caso, la existencia de seres que, siendo humanos, no compran pólizas, no hace falso el enunciado original, pero sí su traducción.

Parece, pues, que el enunciado en discusión tendría en

$$\wedge x\,(Cx \rightarrow Hx)$$

una más adecuada esquematización dentro de la lógica de predicados monádicos[250].

¿Quiere esto decir que ningún enunciado compuesto con la partícula 'sólo' —o cualquiera de sus equivalentes— puede, a pesar de las apariencias, verterse correctamente empleando el bicondicional? En absoluto.

Sea, por ejemplo, el siguiente enunciado:

Sólo los seres humanos utilizan un lenguaje que está libre del control de estímulos externos y estados internos[251].

---

[250] Otra cosa sería si hubiéramos dicho 'Solamente los seres humanos están en disposición [o se ven en la necesidad] de comprar pólizas'. En este caso sí que sería adecuada la utilización del bicondicional.

[251] Cfr., por ejemplo, N. Chomsky, *Cartesian Linguistics*. Nueva York, Harper and Row, 1966. V. cast. de E. Wulff: *Lingüística cartesiana*. Madrid, Editorial Gredos, 1969, *passim*.

Aquí, sí. Aquí no sólo cabe, sino que parece obligado, el recurso al bicondicional:

$$\wedge x\,(Hx \leftrightarrow Lx)^{252}$$

O bien:

$$\wedge x\,(Hx \rightarrow Lx) \wedge \wedge x\,(Lx \rightarrow Hx)$$

En efecto: lo que se dice es que todos los hombres utilizan un lenguaje que está libre del control de estímulos externos o estados internos, y que todos aquellos seres que utilizan un lenguaje libre del control de estímulos externos o estados internos son hombres.

Pasemos a un nuevo ejemplo:

Ninguna ópera de Wagner, excepto las que componen su *Tetralogía*, dura menos de diecisiete horas.

No parece muy difícil el problema planteado por la presencia de la partícula 'excepto' introduciendo una oración: El siguiente esquema podría ser correcto:

$\wedge x\,[(Wx \wedge \neg Tx) \rightarrow \neg Dx]$ ['Para todo x, si x es una ópera de Wagner y x no forma parte de su *Tetralogía*, entonces x no dura menos de diecisiete horas'].

Similar estructura lógica tendría este otro enunciado:

Ningún parapsicólogo que no tome su oficio con ironía es inteligente

Su esquema, en efecto, sería:

$$\wedge x\,[(Px \wedge \neg Tx) \rightarrow \neg Ix]$$

Consideremos un nuevo caso:

Los que conocen Oviedo son los únicos que pueden disfrutar hasta el fondo leyendo *La Regenta*.

---

[252] Es obvio que hemos simplificado considerablemente la esquematización. Hemos convertido la expresión 'utilizar un lenguaje libre del control de estímulos externos o estados internos' en un único predicado.

El hecho de que este enunciado sea equivalente a otro que empezara con '*Solamente* los que conocen Oviedo...', induce —y no parece engaño— a representarlo así:

$$\bigwedge x\,(Ox \leftrightarrow Dx)$$

Es decir: 'Si y sólo si x conoce Oviedo, entonces x puede disfrutar hasta el fondo *La Regenta*'.

El enunciado

Unicamente los dioses y los demonios conocen el destino del hombre

añade a las presentadas por los enunciados anteriores una dificultad más. Ciertamente, el enunciado tiene la estructura de un bicondicional. Centrando en ello su atención, alguien, dejándose extraviar por la apariencia de la frase, podría verse llevado a esquematizarla así:

$$\bigwedge x\,(Dx \wedge Mx) \rightarrow Cx$$

No, sin embargo. Porque entonces parece como si para comprender el destino del hombre fuera necesario ser *a la vez* dios y demonio. Y lo cierto es que, atendiéndonos a lo dicho en el enunciado inicial, basta con ser una de las dos cosas. Razón por la cual habría que esquematizarlo así:

$$\bigwedge x\,[(Dx \vee Mx) \leftrightarrow Cx]$$ [254]

De modo similar, un enunciado como

Los viejos y los niños no siempre resultan interesantes

tendría una traducción adecuada en el esquema

$$\neg \bigwedge x\,[(Jx \vee Nx) \rightarrow Ix],$$

y no en

$$\neg \bigwedge x\,[(Jx \wedge Nx) \rightarrow Ix]$$

Veamos, por último, el enunciado

Los agentes de la CIA y los osos hormigueros sólo adquieren figura humana cuando la luna está en cuarto menguante

253 Recuérdese, no obstante, que '$\vee$' representa la disyunción *no excluyente*.

Quizá fuera correcto esquematizarlo así:

$$\bigwedge x\,\{p \leftrightarrow [(Cx \vee Ox) \rightarrow Fx]\}$$

['Para todo x, si y sólo si la luna está en cuarto menguante, entonces, si x es un agente de la CIA o un oso hormiguero, entonces x adquiere figura humana'].

Pero también podría proponerse esta otra simbolización:

$$\bigwedge x\,[(Cx \vee Ox) \rightarrow (p \leftrightarrow Fx)]$$

['Para todo x, si x es un agente de la CIA o un oso hormiguero, entonces, si y sólo si la luna está en cuarto menguante adquiere x figura humana'].

Todo lo anterior no es más que un breve muestrario de los problemas que plantea la traducción de ciertos ejemplares de enunciado del lenguaje natural al simbolismo lógico. Es innecesario insistir en que no es posible hacer de esa labor de traducción una labor rutinaria: no es posible siquiera ofrecer un inventario completo de las dificultades que podrían presentarse en semejante tarea.

Análisis reductivo y análisis pregnante

Quizá sea éste el momento de resaltar un aspecto del análisis lógico que con frecuencia se olvida. A la vista salta el otro aspecto de ese análisis: el aspecto reductivo, simplificador: la lógica como almacén de uniformes, como arsenal de lechos de Procusto en los que encajonar la creatividad lingüística. La lógica, en efecto, no entiende

de bellezas literarias, de sagaces matices, de retóricas modulaciones. Entre un verso como

Cada beso perfecto aparta el tiempo (P. Salinas)

y una trivialidad como

Cada paso que doy hacia adelante me aleja del punto de partida

no haría la lógica otra distinción que la derivada de la conveniencia de elegir en cada caso distintas letras predicativas que sirvan de abreviatura.

No es ésta, sin embargo, la única posibilidad de hacer uso del análisis lógico.

En el capítulo anterior hemos dejado ya dicho que los *Principia Mathematica* de A. N. Whitehead y B. Rusell constituyen un momento decisivo en la constitución de la lógica como ciencia. Los *Principia Mathematica* son a la vez una recapitulación y una cumbre. Pues bien: en la Introducción a la primera edición de esa obra, los autores comienzan ofreciendo una justificación del empleo, en lógica, de un lenguaje artificial. De entre las razones aducidas para ello —lo abstracto del asunto que la lógica estudia, la rica complejidad del lenguaje natural, que, si bien es muy de celebrar a todos los demás efectos, hace poco transparente la formulación en él de las expresiones que enuncian inferencias—, nos interesa sobre todo una: la tercera que ellos dan[254] y que cabría reformular así: el lenguaje lógico es un lenguaje con estructura de cálculo; un lenguaje, por tanto, cuyas reglas de formación y de inferencia están todas ellas formuladas con entera precisión. Ello hace que, una vez traducidas al simbolismo lógico, las expresiones del lenguaje natural puedan ser transformadas —trocadas en expresiones equivalentes— con mayor acuidad. Dicho de otro modo: una vez montadas en el mecanismo de la lógica formal, las expresiones del lenguaje cotidiano desnudan todas sus implicaciones. Puesto en símbolos esquemáticos, un enunciado descubre su estructura, y con ello se presta mejor al despliegue de todo lo que en él está implícito. Precisamente, como saben muy bien los lingüistas, el mejor procedimiento para mostrar la necesidad de establecer distinciones estructurales profundas entre enunciados superficialmente similares es a veces el de especificar las implicaciones de cada uno de ellos. Si hay algo que uno de ellos implique y el otro no, es que se trata de enunciados en el fondo distintos.

Veámoslo con mayor claridad mediante algún ejemplo. Tomemos el siguiente enunciado:

Ningún alma en pecado alcanzará la bienaventuranza.

[254] A. N. Whitehead y B. Russell: *Principia Mathematica*. Vol I. Cambridge, at the University Press, 1910 (2.ª ed., 1927). Intr., págs. 1-3, Cfr. esp., pág. 2.

En símbolos:

$$\wedge x (Ax \wedge Px) \rightarrow \neg Bx$$

['Para todo x, si x es una alma y x está en pecado, entonces x no alcanzará la bienaventuranza'].

Ahora bien: ya hemos dicho que la lógica de predicados no es un cálculo aparte de la lógica de enunciados. Es, muy al contrario, una ampliación superadora de éste: un cálculo de mayor alcance en el análisis formal de las inferencias. Por otra parte, y en lo que se refiere a la lógica de predicados monádicos de primer orden, es fácil ver ya un isomorfismo con la lógica de enunciados. Parece, en efecto, como si la única diferencia con respecto a ésta fuera el hecho de que los enunciados que enlazamos mediante las conectivas están, ahora, analizados. La estructura lógica es la misma, y el único cambio consiste en que la alusión al contenido es más detallada: en lugar de cubrir los enunciados con una letra que los abarque, articulamos su estructura interna mediante letras predicativas y símbolos de individuo. Por lo demás, no hay diferencia. No hay diferencia entre una expresión como

$$\wedge x [(Ax \wedge Px) \rightarrow \neg Bx]$$

y una expresión como

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg r$$

Lo cual quiere decir que podemos aplicar a la primera las mismas reglas de transformación, o de inferencia, que en el capítulo anterior aplicábamos a esquemas como el segundo. Aunque dicha aplicación se verá precisada y sistematizada más adelante en este mismo capítulo, podemos ir ya adiestrándonos en la transformación de esos esquemas cuantificacionales mediante las reglas que conocemos. Veamos, pues, con unos pocos ejemplos, cómo las reglas de la lógica hacen «dar de sí» a los enunciados.

Por la Regla de Contraposición del condicional, el enunciado de que partíamos se transforma en

$$\wedge x [Bx \rightarrow \neg (Ax \wedge Px)]$$

El consecuente de ese condicional es una conjunción de enunciados negada. Equivale, por tanto, a la disyunción de esos mismos enunciados negados. De la expresión anterior se puede, pues, pasar a esta otra:

$$\wedge x [Bx \rightarrow (\neg Ax \vee \neg Px)$$

Lo cual, dado que una disyunción con el primer miembro negado equivale a un condicional, nos llevaría a:

$$\bigwedge x\,[Bx \rightarrow (Ax \rightarrow \neg Px)]$$

Y aplicando ahora la Regla de Contraposición del condicional al consecuente, llegaríamos a

$$\bigwedge x\,[Bx \rightarrow (Px \rightarrow \neg Ax)]$$

Es decir: 'Para todo x, si x alcanza la bienaventuranza, entonces, si x está en pecado es que x no es una alma'.

Afirmación un tanto extraña. En efecto: ¿acaso puede hablarse de alcanzar o perder la bienaventuranza por respecto a otros entes que no sean las almas? Con otras palabras: parece que cuando decimos que x alcanza la bienaventuranza estamos *presuponiendo* —entre otras muchas cosas— que x es una alma. Sólo de las almas se puede decir que estén manchadas o limpias de pecado. Así pues, el conjunto de las almas es *el universo del discurso* previo —y que, por tanto, debiera haber quedado implícito— de nuestro enunciado. Habría, pues, que haberlo esquematizado así:

$$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Bx)$$

['Para todo x, si x está en pecado, entonces x no alcanzará la bienaventuranza'].

Veamos un nuevo caso, también problemático. Sea el siguiente enunciado:

De entre los hombres, unos se resignan a no ser felices, en tanto que otros pretenden serlo.

En símbolos:

$$\bigwedge x\,[Hx \rightarrow (Rx \nleftrightarrow \neg Rx)]$$

Respecto de esta esquematización podrían hacerse tres observaciones: 1.º Como en el ejemplo anterior, sobraría el antecedente del condicional. Sólo los hombres pueden ser víctimas del ansia de felicidad. Los hombres son, pues, nuestro universo del discurso. 2.º Parece que resignarse a no ser feliz es la negación de pretender serlo. Hemos, pues, simbolizado los predicados correspondientes por la misma letra, aunque, naturalmente, precediéndola, en uno de los casos, de la negación. 3.º El uso del

símbolo '$\nleftrightarrow$' viene aconsejado por el hecho de que la disyunción entre los que se pliegan y los que se rebelan parece excluyente.

Dando, pues, por sentado que nuestra afirmación no puede referirse más que a los hombres, tendríamos:

$$\bigwedge x\,(Rx \nleftrightarrow \neg Rx)$$

La disyunción excluyente equivale a la negación de un bicondicional. Así, pues, cabe transformar ese esquema en este otro:

$$\bigwedge x \neg\,(Rx \leftrightarrow \neg Rx)$$

Y —puesto que un bicondicional es una conjunción de condicionales— en este otro:

$$\bigwedge x \neg\,[(Rx \rightarrow \neg Rx) \wedge (\neg Rx \rightarrow Rx)]$$

Habida cuenta, sin embargo, de la posibilidad de definir una conjunción en términos de disyunción con ayuda de la negación tendríamos:

$$\bigwedge x\,[\neg\,(Rx \rightarrow \neg Rx) \vee \neg\,(\neg Rx \rightarrow Rx)]$$

Pero aprovechando que un condicional negado equivale a la afirmación conjunta de su antecedente y la negación de su consecuente, llegaríamos a

$$\bigwedge x\,[(Rx \wedge Rx) \vee (\neg Rx \wedge \neg Rx)]$$

De lo cual, por inferencia tautológica, venimos a dar en

$$\bigwedge x\,(Rx \vee \neg Rx)$$

Así pues, partiendo de una disyunción excluyente hemos llegado, por un itinerario deliberadamente alargado, a una disyunción no excluyente[255]. Ello no es mala ocasión para pensar en la limitación que supone operar a base de puros valores de verdad.

Por último, y como mero ejemplo de las implicaciones —en este caso, epistemológicas— del análisis formal, nos limitaremos a dejar planteada la llamada «paradoja de la confirmación» o «paradoja de los cuervos»[256].

[255] No se olvide que el esquema

$$(p \nleftrightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$$

es una tautología.

[256] «Paradoja de Hempel» sería también una denominación apropiada. Fue él, en efecto, quien la planteó: Cfr. C. G. Hempel, «Studies in the Logic of Confirmation», *Mind*, vol. 54 (1945), págs. 1-26 y 97-121. Reimpresión (con un «Postscript (1964) *On Confirmation*») en C. G. Hempel, *Aspects of Scientific Explanation*, N. York-Londres, The Free Press-Collier/Macmillan, 1965, págs. 3-46, 47-51.

Sea el enunciado

Todos los cuervos son negros.

Se trata, sin duda, de un enunciado universal afirmativo cuya adecuada esquematización parece ser sencillamente ésta:

$$\wedge x\,(Cx \rightarrow Nx)$$

Pasemos ahora de las consideraciones lógicas a las epistemológicas. Es evidente que si encontráramos un individuo del que pudiera afirmarse C, pero no N (con otras palabras: si topáramos con un cuervo que no fuera negro), el enunciado «Todos los cuervos son negros» se vería refutado, falsado.

Por el contrario: cada cuervo negro que encontráramos contribuiría a confirmar[257] el enunciado en cuestión.

Dicho en abstracto: dado un enunciado general, la existencia de individuos que hacen verdadero su antecedente y falso su consecuente hace falso el enunciado. Y la existencia de individuos que hagan verdadero tanto su antecedente como su consecuente confirma cada vez más —pero nunca para siempre, por así decir— su verdad.

Por otra parte, es claro que si dos enunciados son equivalentes, tendrán las mismas condiciones de verdad. Serán verdaderos o falsos en los mismos casos. Todo lo que haga falso al uno constituirá asimismo una falsación del otro; todo lo que suponga una confirmación del primero contribuirá también a hacer verdadero el segundo.

Volvamos a la lógica. Mediante la más simple aplicación de la Regla de Contraposición del condicional podemos transformar el enunciado inicial en este otro:

$$\wedge x\,(\neg Nx \rightarrow \neg Cx)$$

que todos reconocerían como equivalente al primero.

Tomemos ahora el enunciado

Todas las cosas no negras no son cuervos

que sería la lectura en el lenguaje ordinario del esquema cuantificacional que acabamos de reproducir.

Según lo que hemos dicho, este enunciado se vería confirmado cada vez que registráramos la existencia de individuos que, no siendo negros, no son cuervos; es decir, la existencia de individuos que hacen verdadero

[257] Pero nunca de manera concluyente, pues siempre estaría abierta la posibilidad de encontrar cuervos que no fueran negros.

su antecedente y su consecuente: la existencia, por ejemplo, de una nube blanca, de un flamenco rosa, de una camisa parda, etc.

Ahora bien: el enunciado «Todas las cosas que no son negras no son cuervos» es, ya lo hemos dicho, equivalente al enunciado «Todos los cuervos son negros». Por tanto, todo lo que suponga una confirmación del primero constituirá asimismo una confirmación del segundo. Resultaría, entonces, que cada vez que contempláramos un caballo alazán, una túnica roja, una bandera azul y blanca, estaríamos, si lo supiéramos, corroborando la afirmación según la cual todos los cuervos son negros.

La lógica, pues, levanta, en cada enunciado, las implicaciones que encierra. Curiosamente, esas implicaciones que ella alumbra suponen, en muchos casos, desafíos a la propia lógica en su actual configuración, muestras de lo insatisfactorio de su estado presente. No es mala cosa, sin embargo, que una ciencia se constituya en instrumento de crítica de ella misma.

Procedimientos de decisión en lógica de predicados monádicos

Olvidemos, por un momento, el lenguaje ordinario. En el lenguaje de la lógica de predicados monádicos podemos construir infinitos esquemas de enunciado. Aquellos esquemas que tengan —o a los que se pueda dar, mediante las transformaciones apropiadas— forma de condicional constituirán, específicamente, esquemas de inferencia, esquemas que presentan modos (válidos o no válidos) de argumentación o razonamiento. Esquemas cuantificacionales de inferencia serían, por ejemplo,

$$[\wedge x\,(Px \rightarrow Qx) \wedge \wedge x\,(Qx \rightarrow Rx)] \rightarrow \wedge x\,(Px \rightarrow Rx)$$
$$\wedge x\,(Px \rightarrow Qx) \rightarrow \wedge x\,(Qx \rightarrow Px)$$
$$[\wedge x\,(Px \rightarrow Qx) \wedge \vee x\,(Rx \wedge Px)] \rightarrow \vee x\,(Rx \wedge Qx)$$

Ahora bien: ¿Cómo decidir si un determinado esquema cuantificacional representa una forma válida de razonamiento? En lógica de enunciados disponíamos de un procedimiento —que no es el único— para decidir si un enunciado en el que se formulaba un esquema de inferencia era o no una verdad formal. Si lo era, entonces todo razonamiento hecho de esa forma sería un razonamiento válido.

Ese procedimiento de decisión era el de las tablas de verdad.

¿Disponemos de algún procedimiento semejante en lógica de predicados monádicos? Sí. Es más: seguimos disponiendo del propio método de las tablas de verdad. Con la siguiente restricción importante: que el universo del discurso sea finito. Si el universo del discurso es finito podemos seguir utilizando en lógica de predicados monádicos el método de las tablas de verdad como método de decisión.

En efecto: ya hemos visto cómo un enunciado universal proferido

sobre un universo del discurso finito equivalía a una conjunción de enunciados singulares que tendría tantos miembros cuantos miembros tuviera el conjunto universo. Y sabemos también que respecto del cuantificador particular puede decirse otro tanto, sólo que en este caso la traducción habría que llevarla a cabo en términos de disyunción.

Supongamos, por ejemplo, un universo del discurso que conste de *dos* individuos. A un esquema como

$$\bigwedge x\, Px \rightarrow \bigvee x\, Px$$

podríamos, entonces, darle esta otra forma:

$$(Pa \wedge Pb) \rightarrow (Pa \vee Pb)$$

Y es evidente que, así presentado, cabe someterlo a un tratamiento con tablas de verdad idéntico al que haríamos de una expresión de la forma '$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$'. Es decir:

Pa	Pb	$Pa \wedge Pb$	$Pa \vee Pb$	$(Pa \wedge Pb) \rightarrow (Pa \vee Pb)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Tomemos ahora otro esquema:

$$[\bigwedge x\, (Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa$$

Supongamos una vez más que el universo del discurso se compone de dos individuos. Siendo así, la expresión anterior equivaldría a esta otra

$$\{[(Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb)] \wedge \neg Qa\} \rightarrow \neg Pa$$

Y este esquema es isomórfico de

$$\{[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \wedge \neg q\} \rightarrow \neg p$$ [258],

cuya tabla de verdad sabemos cómo hacer.

De igual modo, el esquema

$$\bigwedge x\, (Px \rightarrow Qx) \rightarrow \bigwedge x\, (\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

[258] Téngase en cuenta que '*Pa*', '*Pb*', '*Qa*' y '*Qb*' son cuatro enunciados distintos que han de ser esquematizados, por tanto, mediante cuatro letras de enunciado distintas

podría transformarse, bajo el supuesto de que el universo del discurso constara de *tres* individuos, en este otro:

$$[(Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb) \wedge (Pc \rightarrow Qc)] \rightarrow [(\neg Qa \rightarrow \neg Pa) \wedge$$
$$\wedge (\neg Qb \rightarrow \neg Pb) \wedge (\neg Qc \rightarrow \neg Pc)]$$

Para comprobar si este esquema es verdadero en todos los casos posibles, bastaría con hacer una tabla de verdad que empezara desplegando las sesenta y cuatro combinaciones posibles de los valores de verdad de los seis enunciados que él intervienen.

Nueve enunciados intervendrían en el esquema

$$[\bigwedge x\, (Px \rightarrow Qx) \wedge \bigwedge x\, (Qx \rightarrow Rx)] \rightarrow \bigwedge x\, (Px \rightarrow Rx)$$

si le atribuyéramos un universo del discurso que constara también de tres individuos.

Y puesto que intervienen nueve enunciados, habrá 2^9, es decir, 512 combinaciones posibles de sus valores de verdad.

Desarrollar una tabla de verdad de quinientas doce filas es una tarea moderadamente larga y escasamente creativa. Y lo peor es que tampoco ofrece grandes compensaciones. En efecto: acabado que hubiéramos la tabla de verdad, habríamos alcanzado tan sólo una precaria certidumbre: la de que el esquema es verdadero en cualquier universo del discurso que contenga tres individuos. Ahora bien: todo el mundo parece convencido —sin necesidad de recurrir a refinadas técnicas lógicas de persuasión— de que si todos los individuos —sean tres, o mil, o infinitos— que poseen tal propiedad poseen por ende tal otra, y todos los que poseen esta otra poseen también una tercera, entonces todos los que poseen la primera poseen asimismo la última. Para nadie es un secreto, por ejemplo, que si todos los españoles son seres humanos y todos los seres humanos son seres contradictorios, entonces todos los españoles son seres contradictorios. Nuestra «intuición lógico-formal», por llamarla de algún modo, nos hace reconocer como válido cualquier razonamiento que tenga esa forma, como verdadero cualquier enunciado con esa estructura. Resultaría, pues, grotesco el esfuerzo por mostrar mecánicamente la verdad de algo que intuitivamente se nos antoja trivial. Trivial es mostrar que se cumple para tres individuos algo de lo que no nos cabe duda que se cumple para todos.

Cierto que cabría abreviar el proceso. Ya veíamos en el capítulo anterior cómo era posible, mediante el método de reducción al absurdo, eludir en ocasiones la confección de largas tablas de verdad [259].

[259] En efecto: tomemos el siguiente esquema cuantificacional:

$$[\bigwedge x\, (Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa.$$

Cierto asimismo que, según un teorema debido a Leopold Lowenheim[260], todo esquema cuantificacional que, conteniendo n predicados, sea verdadero en un unverso del discurso que tenga 2^n miembros, es verdadero en todo universo no vacío. Dicho mediante un ejemplo: si el esquema

$$[\wedge x (Px \rightarrow Qx) \wedge Pa] \rightarrow Qa$$

en el que aparecen dos predicados, 'P' y 'Q', se cumplen en un universo de 2^2 —es decir, cuatro— individuos, entonces se cumple en todo universo no vacío.

Todo ello, sin embargo, tiene una importancia que, aunque grande, es puramente teórica. La posibilidad de prolongar la aplicación del método de las tablas de verdad —abreviable a veces mediante el de reducción al absurdo— hasta abarcar los esquemas cuantificacionales monádicos es una posibilidad que interesa establecer en abstracto, pero

---

Si suponemos que el conjunto universo tiene tres miembros, podremos decir que ese esquema es equivalente a este otro

$$[(Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb) \wedge (Pc \rightarrow Qc) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa.$$

Supongamos ahora que esta condicional fuera falso. Sólo podría serlo por una razón: porque su antecedente fuera verdadero y su consecuente falso: Indiquémoslo:

$$[(Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb) \wedge (Pc \rightarrow Qc) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa$$

1 1 1 0 0

Ahora bien: si el antecedente es verdadero, tendrán que serlo todos sus miembros, puesto que se trata de una conjunción. Por otra parte, si '$\neg Pa$' es falso, 'Pa' habrá de ser verdadero:

$$[(Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb) \wedge (Pc \rightarrow Qc) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa.$$

1 1 1 1 1 1 1 0 0

Tenemos, entonces, que '$\neg Qa$', que es uno de los miembros de la conjunción que compone el antecedente, es verdadero —o ha de serlo, si se acepta el supuesto de que el antecedente en su conjunto lo es. Pero si '$\neg Qa$' es verdadero, 'Qa' ha de ser falso. Y entonces nos encontramos con que la expresión '$Pa \rightarrow Qa$', —el primero de los miembros del antecedente—, que es un condicional, aparece como verdadero, y, sin embargo, tiene un antecedente verdadero y un consecuente falso:

$$[(Pa \rightarrow Qa) \wedge (Pb \rightarrow Qb) \wedge (Pc \rightarrow Qc) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa.$$

1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0

Hemos ido a dar, pues, en una contradicción, lo cual nos obliga a abandonar nuestra suposición inicial de que el condicional que compone la fórmula entera no era derdadero.

[260] Lowenheim: «Über Moglichkeiten im Relativkalkül», *Mathematische Annalen*, vol 76 (1915), págs. 447-470. Versión inglesa en J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967, págs. 228-251, esp. págs. 235 y sigs.

que no resulta cómodo utilizar en concreto. Esa es la razón de que se haya recurrido a otras técnicas más expeditivas[261].

En cualquier caso, y dado que el propósito de este libro es simplemente el de estimular al estudio de la lógica con vistas a su aplicación en diversos campos —y, señaladamente, en el de la argumentación filosófica—, interesaba sólo dejar constancia de que cabe, en principio, utilizar esos métodos. Ya sabemos, sin embargo, que el modo más *natural* de comprobar si un razonamiento es válido no consiste en averiguar si el enunciado que lo expresa es formalmente verdadero, sino en determinar si su conclusión se sigue de las premisas de acuerdo con reglas de inferencia correctas.

Leyes de la lógica de predicados monádicos

Al igual que hicimos en lógica de enunciados, daremos ahora una breve lista de leyes de la lógica de predicados monádicos. Se trata, claro es, de una selección de esquemas cuantificacionales *válidos*, es decir, de fórmulas inferenciales que son verdaderas en todos los casos, bajo toda interpretación.

Ocurre, sin embargo, lo siguiente. Aquellas leyes que, por su simplicidad y su carácter básico, habrían de ir al comienzo de nuestra enumeración, plantean problemas —a algunos de los cuales ya hemos venido aludiendo— que hacen aconsejables algunas observaciones previas.

Sabemos ya que en lógica de predicados monádicos cabe distinguir cuatro tipos fundamentales de enunciado: universal afirmativo, universal negativo, particular afirmativo y particular negativo. Por motivos que pertenecen a la historia de la lógica en la Grecia clásica[262] interesaba a Aristóteles examinar ciertas relaciones lógicas existentes entre estos cuatro tipos de enunciado[263]. Relaciones, por ejemplo, de compatibilidad o incompatibilidad: ¿es posible, cabría preguntarse, que sean verdaderos a la vez un enunciado universal afirmativo y un enunciado universal negativo que tengan los mismos predicados?

Aristóteles y la tradición elaboraron un cuadro en el que quedan reflejadas las relaciones entre estos cuatro modelos básicos de enunciado. Vamos a reproducir ese cuadro, pero no sin antes recordar algo a lo que ya hemos aludido. Tradicionalmente se ha venido considerando

---

[261] Sobre los problemas de la decidibilidad en lógica de predicados monádicos de primer orden, véase la excelente exposición de Manuel Garrido en su *Lógica simbólica*. Madrid, Editorial Tecnos, 1974, págs. 338 y sigs.

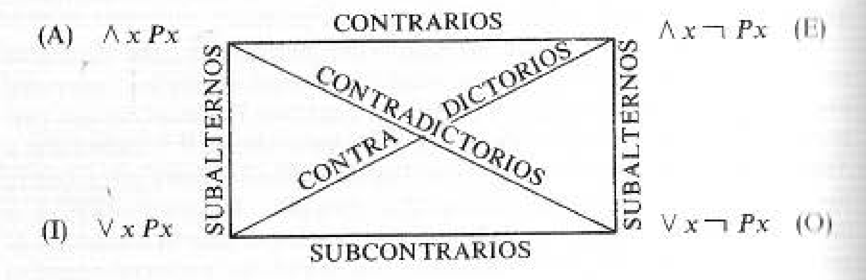
[262] Cfr., por ejemplo, W. y M. Kneale, *The Development of Logic*. Oxford, at the Clarendon Press, 1961, 1964, 1966, 1968. V. cast. de J. Muguerza: *El desarrollo de la lógica*. Madrid, Editorial Tecnos, 1972; caps. I y II; esp., pág. 23.

[263] Y así lo hizo en su tratado Περὶ ἑρμηνείας *(Liber de Interpretatione)*, 17b 16, y siguientes.

que las cuatro formas más simples de enunciado eran éstas: 'Todo *S* es *P*' [Enunciado universal afirmativo, o enunciado de tipo A]; 'Ningún *S* es *P*' [Enunciado particular negativo, o enunciado de tipo E]; 'Algún *S* es *P*' [Enunciado particular afirmativo, o enunciado en I], y 'Algún *S* no es *P*' [Enunciado particular negativo, o enunciado en O]. Como sabemos, en la lógica actual corresponderían a estos cuatro tipos los siguientes esquemas:

$$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx) \qquad \text{A}$$
$$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg\, Qx) \qquad \text{E}$$
$$\bigvee x\,(Px \wedge Qx) \qquad \text{I}$$
$$\bigvee x\,(Px \wedge \neg\, Qx) \qquad \text{O}$$

Si, por tanto, quisiéramos reproducir estrictamente la teoría tradicional de las relaciones entre proposiciones cuantificadas, habríamos de hacerlo en términos de esos cuatro esquemas. Y así lo haremos, pero después. Porque, como sabemos, la lógica actual reconoce cuatro formas todavía más básicas de enunciado, a saber: '$\bigvee x\, Px$', '$\bigwedge x \neg\, Px$', '$\bigvee x\, Px$' y '$\bigvee x \neg\, Px$'. Empezaremos, pues, por examinar las relaciones entre estos esquemas, los más simples y estudiando la posibilidad de establecer entre ellos las mismas relaciones que la lógica tradicional reconoce entre los cuatro esquemas —más complejos— que acabamos de reproducir.



Habría, pues, cuatro relaciones:

1. La relación de *contradictoriedad* o *contradicción*. Un enunciado de tipo A es contradictorio de un enunciado de tipo O (que verse acerca de lo mismo, es decir, que contenga los mismos predicados[264]), y un enunciado de tipo E es contradictorio de un enunciado de tipo I.

Ahora bien: hemos de tener en cuenta dos cosas: en primer lugar, que la relación de contradicción es, como veremos, simétrica, o, lo que es lo mismo, que si un enunciado es contradictorio de otro, éste lo es también del primero. En segundo lugar, que decir que un enunciado es

[264] Especificación que, en adelante, omitiremos, dándola por sobreentendida.

contradictorio de otro es como decir que equivale a su negación. Valen, pues, los siguientes cuatro esquemas:

$$\bigwedge x\, Px \leftrightarrow \neg \bigvee x \neg\, Px$$
$$\bigvee x\, Px \leftrightarrow \neg \bigwedge x \neg\, Px$$
$$\bigwedge x \neg\, Px \leftrightarrow \neg \bigvee x\, Px$$
$$\bigvee x \neg\, Px \leftrightarrow \neg \bigwedge x\, Px$$

2. La relación de *subalternación*. Un enunciado en I será subalterno del correspondiente enunciado en A, y otro tanto cabe decir de un enunciado en O por respecto al enunciado en E correspondiente.

¿Qué es lo que entraña esta relación de subalternación? La relación de contradicción, que acabamos de ver, resultaba bien sencilla: si un enunciado es verdadero, su contradictorio es falso. ¿Cuál son, ahora, las relaciones de verdad entre enunciados subalternos?

2.1. Si un enunciado universal afirmativo es verdadero, verdadero será también el enunciado particular afirmativo correspondiente. De igual modo, si es verdadero un enunciado de tipo E, asimismo será verdadero el correspondiente enunciado de tipo O. Es decir:

$$\bigwedge x\, Px \rightarrow \bigvee x\, Px$$
$$\bigwedge x \neg\, Px \rightarrow \bigvee x \neg\, Px$$

Ahora bien: estos dos esquemas sólo serán válidos en el caso de que se excluyan los universos del discurso vacíos. De no ser así, los esquemas no serían válidos, pues, aun siendo verdadero el antecedente, podría ser falso el consecuente[265].

[265] Las relaciones de subalternación entre enunciados sugieren problemas interesantes. Nos limitaremos a dejar planteado alguno de ellos.

Se dice que, admitido el alcance existencial —o, en última instancia, la presuposición ontológica— de un enunciado universal, de la verdad de éste se sigue la del enunciado particular correspondiente. Ahora bien: cabría quizá pensar que, cuando un enunciado universal es verdadero, el enunciado particular correspondiente es, en un sentido, verdadero, pero *no dice toda la verdad acerca del tema*. La cosa se ve especialmente clara si acudimos a enunciados de los que cabría llamar 'analíticos' —en el sentido kantiano del término. De un enunciado como

Todos los filósofos presocráticos ejercieron como tales antes que Sócrates

cabría inferir

Algunos filósofos presocráticos ejercieron como tales antes que Sócrates

Igualmente, sería correcto el paso de

Todos los sacerdotes son gnósticos

(que podría obtenerse, por irónica contraposición del condicional, a partir de «Ningún agnóstico es sacerdote») a

Algunos sacerdores son gnósticos.

2.2. Si un enunciado particular es falso, ello acarrea la falsedad del enunciado universal correspondiente.

En efecto: tomemos, por ejemplo, un enunciado particular afirmativo, $\bigvee x\, Px$. Supongamos que es falso, en cuyo caso será verdadera su negación, $\neg \bigvee x\, Px$. Ahora bien: sabemos que '$\neg \bigvee x\, Px$' equivale a '$\bigwedge x \neg Px$'. Pero acabamos de ver que $\bigwedge x \neg Px \rightarrow \bigvee x \neg Px$. Y si es verdadero $\bigvee x \neg Px$ no puede ser verdadero su contradictorio, $\bigwedge x\, Px$. Así, pues, si $\bigvee x\, Px$ es falso, $\bigwedge x\, Px$ lo es también. De igual modo puede mostrarse que si es falso $\bigvee x \neg Px$ también lo es $\bigwedge x \neg Px$.

Cabría decir, entonces, que

$$\neg \bigvee x \neg Px \rightarrow \neg \bigwedge x \neg Px$$
$$\neg \bigvee x\, Px \rightarrow \neg \bigwedge x\, Px$$

3. La relación de *contrariedad*. Un enunciado de tipo A y un enunciado de tipo E son *contrarios* entre sí. ¿Qué quiere ello decir? Que no pueden ser verdaderos a la vez, pero sí falsos a la vez. Pero ello en el supuesto, una vez más, de que se excluyan los universos del discurso vacíos. En ese supuesto, es evidente que dos enunciados universales, afirmativo el uno y el otro negativo, no pueden ser verdaderos a la vez. Pueden, sin embargo, ser falsos ambos. Por lo tanto, de la verdad de un enunciado universal afirmativo cabe inferir la falsedad del enunciado universal negativo correspondiente. Igualmente, de la verdad de un enunciado en E se seguiría la verdad del enunciado en A que tuviera los mismos predicados. Así, pues,

$$\bigwedge x\, Px \rightarrow \neg \bigwedge x \neg Px$$
$$\bigwedge x \neg Px \rightarrow \neg \bigwedge x\, Px$$ [266]

Ahora bien —y esta es, naturalmente, una consideración extralógica—: ¿quién diría que algunos sacerdotes son gnósticos si pensara que es verdad que *todos* los sacerdotes lo son? Las inferencias que consisten en pasar de la verdad de un enunciado en A o en E a la de su subalterno son inferencias que la lógica tiene obligación de examinar y —con las restricciones aludidas— aceptar como válidas, pero que el sujeto raciocinante normal no realiza. Y no las realiza por economía intelectual; porque son ociosas. Es como, en aritmética, multiplicar por 1. Nadie multiplica un número por la unidad, porque todo el mundo sabe el resultado. Se trata de una operación ociosa, que, sin embargo, es objeto de consideración en aritmética.

Por lo demás, las experiencias de P. Oléron (a las que su autor se refiere en el *Traité de Psychologie Expérimentale*, publicado bajo la dirección de P. Fraisse y J. Piaget, Fascicule VII: «L'Intelligence». Paris, P. U. F., 2ª ed., 1969, pág. 41 [V. cast. en la Editorial Paidós, de Buenos Aires]), parecen mostrar que la interpretación espontánea que los sujetos dan de los enunciados particulares es la interpretación «excluyente». Es decir: que cuando alguien emplea un enunciado particular es porque está convencido de que el enunciado universal correspondiente no es verdadero. Cuando alguien dice «Algunos historiadores mienten» es, normalmente, porque cree que también es verdad que algunos historiadores *no mienten*. Y si es verdadero el enunciado «Algunos historiadores no mienten» es falso su contradictorio. Y su contradictorio es, como hemos visto, «Todos los historiadores mienten».

[266] La validez de ambos esquemas puede apoyarse en la de los de subalternación. '$\neg \bigwedge x \neg Px$' equivale, según los esquemas de contradicción, a '$\bigvee x\, Px$', por lo cual el primero de esos esquemas no es sino otra formulación de '$\bigwedge x\, Px \rightarrow \bigvee x\, Px$'. En cuanto al segundo, es equivalente a '$\bigwedge x \neg Px \rightarrow \bigvee x \neg Px$'.

4. La relación de *subcontrariedad*. Así como A y E son contrarias, I y O son subcontrarias. De los enunciados subcontrarios cabe decir que no pueden ser ambos falsos, pero pueden, en cambio, ser los dos verdaderos. Dado, en efecto, un universo del discurso no vacío, o bien sus miembros poseen la propiedad designada por el predicado P o bien ostentan el atributo significado por el predicado $\neg P$. Pero, por otra parte, bien pudiera ocurrir que algunos de los x fueran P, y otros, en cambio, fueran no-P. Así, pues, de la falsedad de un enunciado particular cabe deducir la verdad de su subcontrario:

$$\neg \bigvee x\, Px \rightarrow \bigvee x \neg Px$$
$$\neg \bigvee x \neg Px \rightarrow \bigvee x\, Px$$ [267]

En cambio, de la verdad del uno no se sigue la falsedad del otro.

Algunos de los esquemas que hemos venido enumerando quedarán muy pronto recogidos en nuestra lista de leyes. Antes, sin embargo, vamos a ver hasta qué punto se mantienen estas relaciones entre esos cuatro tipos de enunciado cuando éstos aparecen presentados según el modo tradicional. Ya hemos dicho que, según la tradición, los tipos más simples de enunciado estarían representados por estos cuatro esquemas:

$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$	A
$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$	E
$\bigvee x (Px \wedge Qx)$	I
$\bigvee x (Px \wedge \neg Qx)$	O

¿Podemos decir que entre ellos se dan los cuatro tipos de relaciones que acabamos de discernir?

1. Comencemos por la relación de *contradicción*. Ella sí se da también con estos esquemas. Tomemos, por ejemplo, el siguiente enunciado universal afirmativo:

Todos los hombres son filósofos (Gramsci).

En símbolos,

$$\bigwedge x (Hx \rightarrow Fx)$$

---

[267] En efecto: tomemos el primer esquema. En él se dice que de la falsedad de un enunciado particular afirmativo (y, por ende, de la verdad de su negación, '$\neg \bigvee x\, Px$') se sigue la verdad de su subcontrario, '$\bigvee x \neg Px$'. Y así es: '$\neg \bigvee x\, Px$' equivale, según hemos visto, a '$\bigwedge x \neg Px$'. Y así enunciado, por subalternación, implica '$\bigvee x \neg Px$'.

Igualmente, la falsedad de $\bigvee x \neg Px$, que expresamos negándolo, equivale, por contradicción, a '$\bigwedge x\, Px$', y esto implica, por subalternación, la verdad de $\bigvee x\, Px$.

Neguemos ahora esa expresión, transformándola en

$$\neg \bigwedge x\,(Hx \rightarrow Fx)$$

Sabemos, sin embargo, que '$\neg \bigwedge x$' puede sustituirse por '$\bigvee x \neg$'. Por tanto, ese último enunciado equivale a este otro:

$$\bigvee x \neg\,(Hx \rightarrow Fx)$$

Si olvidamos el prefijo cuantificacional, el resto de la fórmula es simplemente un condicional negado. Y puesto que $\neg\,(X \rightarrow Y) =_{Df.} (X \wedge \neg\, Y)$, la expresión

$$\bigvee x \neg\,(Hx \rightarrow Fx)$$

equivale a

$$\bigvee x\,(Hx \wedge \neg\, Fx)$$

En efecto: negar que todos los hombres sean filósofos es tanto como afirmar que hay algunos hombres que no lo son. Así, pues,

$$\neg\,[\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)] \leftrightarrow \bigvee x\,(Px \wedge \neg\, Qx)$$

Tomemos ahora un enunciado particular negativo:

Algunas cosas dichas metafóricamente no son confusas.

En símbolos:

$$\bigvee x\,(Mx \wedge \neg\, Cx)$$

Si negamos ese enunciado y afirmamos

$$\neg \bigvee x\,(Mx \wedge \neg\, Cx)$$

estamos diciendo que no hay ningún x tal que x sea una cosa dicha metafóricamente y x no sea confusa. Y puesto que '$\neg \bigvee x$' se puede sustituir por '$\bigwedge x \neg$', tendremos

$$\bigwedge x \neg\,(Mx \wedge \neg\, Cx)$$

expresión que equivale a

$$\bigwedge x\,(Mx \rightarrow Cx)$$

Es decir: «Todo lo dicho metafóricamente es confuso» (Aristóteles).

En general, por tanto,

$$\neg \bigvee x\,(Px \wedge \neg\, Qx) \leftrightarrow \bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$$

Veamos, en tercer lugar, un enunciado universal negativo:

Ningún jefe se equivoca [268]

En símbolos:

$$\bigwedge x\,(Jx \rightarrow \neg\, Ex)$$

Si lo negamos,

$$\neg \bigwedge x\,(Jx \rightarrow \neg\, Ex)$$

nos encontraremos con

$$\bigvee x \neg\,(Jx \rightarrow \neg\, Ex),$$

que podemos transformar en

$$\bigvee x\,(Jx \wedge \neg\neg\, Ex),$$

es decir, en

$$\bigvee x\,(Jx \wedge Ex)$$

Así, pues, en general,

$$\neg\,[\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg\, Qx)] \leftrightarrow \bigvee x\,(Px \wedge Qx)$$

Sea, por último, un enunciado particular afirmativo:

Algunos lingüistas creen que la sintaxis es autónima.

En símbolos:

$$\bigvee x\,(Lx \wedge Cx)$$

Si lo negamos,

$$\neg \bigvee x\,(Lx \wedge Cx),$$

268 El ejemplo nos ha sido sugerido por la lectura del segundo de los «Diecinueve Puntos» de las Juventudes de Acción Popular, que rezaba como sigue: «Disciplina. Los jefes no se equivocan» (*El Debate*, 15-III-1934).

nos encontraremos con

$$\bigwedge x \neg (Lx \wedge Cx),$$

que podemos transformar en

$$\bigwedge x (\neg Lx \vee \neg Cx)$$

y luego en

$$\bigwedge x (Lx \rightarrow \neg Cx)$$

En general, por tanto,

$$\neg [\bigvee x (Px \wedge Qx)] \leftrightarrow \bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$$

2. La relación de *subalternación*. Aquí no se cumple. Ni siquiera excluyendo los universos del discurso vacíos. De la verdad de '$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$' no puede inferirse la de '$\bigvee x (Px \wedge Qx)$', como tampoco la de $\bigvee x (Px \wedge \neg Qx)$' a partir de '$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$'.

3. La relación de *contrariedad*.

Tampoco se cumple. Ya veíamos, al examinar la relación de contrariedad entre esquemas más simples, que ésta podía fundamentarse en la subalternación. Si aquí no puede admitirse esta última, otro tanto ocurrirá con aquella. En efecto: las relaciones de contrariedad podrían formularse así:

$$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow \neg [\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)]$$
$$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx) \rightarrow \neg [\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)]$$

Y los consecuentes de ambos condicionales equivalen, respectivamente, a '$\bigvee x (Px \wedge Qx)$' y '$\bigvee x (Px \wedge \neg Qx)$'. Si admitiéramos esta relación, habríamos de admitir también la de subalternación.

4. La relación de *subcontrariedad*. De ella puede decirse lo mismo que de la anterior. Para poder admitir los esquemas que expresan la subcontrariedad, y que serían

$$\neg \bigvee x (Px \wedge Qx) \rightarrow \bigvee x (Px \wedge \neg Qx)$$

y

$$\neg \bigvee x (Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \bigvee x (Px \wedge Qx)$$

tendría que valer la relación de subalternación, ya que los antecedentes de esos esquemas equivalen respectivamente a '$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$' y '$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$'.

Iniciaremos nuestra lista de leyes de la lógica de predicados monádicos con algunos de los esquemas válidos que hemos ido encontrando en el curso de las consideraciones precedentes:

1. $\bigwedge x Px \leftrightarrow \neg \bigvee x \neg Px.$
2. $\bigvee x Px \leftrightarrow \neg \bigwedge x \neg Px.$
3. $\bigwedge x \neg Px \leftrightarrow \neg \bigvee x Px$
4. $\bigvee x \neg Px \leftrightarrow \neg \bigwedge x Px$

1, 2, 3 y 4 son *Leyes de interdefinición de los cuantificadores* por medio de la negación[269*].

5. $\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow \neg \bigvee x (Px \wedge \neg Qx)$
6. $\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx) \leftrightarrow \neg \bigvee x (Px \wedge Qx).$
7. $\bigvee x (Px \wedge Qx) \leftrightarrow \neg \bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$
8. $\bigvee x (Px \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \neg \bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$

Leyes aristotélicas de oposición es el nombre que tradicionalmente se ha venido dando a 5, 6, 7 y 8. Con ello quiere decirse que se trata de leyes —cuyo origen se remonta a Aristóteles— en las que se expresa la oposición —la oposición *contradictoria*— entre enunciados[270*].

269* Su traducción a lógica de clases es obvia. La de la primera, por ejemplo, sería

$$\bigwedge x (x \in A) \leftrightarrow \neg \bigvee x (x \notin A)$$

o bien

$$\bigwedge x (x \in A) \leftrightarrow \neg \bigvee x (x \in -A).$$

270* La paráfrasis de 5, 6, 7 y 8 en lógica de clases es también muy fácil. La de 6, por ejemplo, podría obtenerse del siguiente modo. Sea *A* la clase de los individuos que hacen verdadero el enunciado abierto '*Px*', y *B* la clase de los individuos que hacen verdadero el enunciado abierto '*Qx*'. Decir, entonces, que

$$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$$

equivale a decir que

$$\bigwedge x (x \in A \rightarrow x \notin B)$$

o, lo que es lo mismo, que

$$A \subset -B.$$

Y esto último se puede decir también con el enunciado

$$\neg \bigvee x (x \in A \wedge x \in B).$$

9. $\bigwedge x\,(Px \leftrightarrow Px)$

Ley de identidad para predicados monádicos[271*].

10. $\bigwedge x \neg\,(Px \wedge \neg\, Px)$

Ley de contradicción para predicados monádicos[272*].

11. $\bigwedge x\,(Px \vee \neg\, Px)$

Ley de tercio excluso para predicados monádicos[273*].

12. $\bigwedge x\,(Px \wedge Qx) \leftrightarrow (\bigwedge x\, Px \wedge \bigwedge x\, Qx)$

Ley de distribución del cuantificador universal por la conjunción[274*].

13. $\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge x\, Px \rightarrow \bigwedge x\, Qx)$

Ley de distribución del cuantificador universal por el condicional[275].

14. $\bigwedge x\,(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge x\, Px \leftrightarrow \bigwedge x\, Qx)$

Ley de distribución del cuantificador universal por el bicondicional[276].

15. $(\bigwedge x\, Px \vee \bigwedge x\, Qx) \rightarrow \bigwedge x\,(Px \vee Qx)$.

Ley de contracción del cuantificador universal por la disyunción[277].

271* En lógica de clases esta ley podría presentarse así:

$$\bigwedge x\,(x \in A \leftrightarrow x \in A).$$

272* En lógica de clases,

$$\bigwedge x \neg\,(x \in A \wedge x \notin A).$$

273* En lógica de clases,

$$\bigwedge x\,(x \in A \vee x \in -A).$$

Dicho de otro modo: entre una clase y su clase complemento agotan el universo del discurso.

274* $\bigwedge x\,[x \in (A \cap B)] \leftrightarrow [\bigwedge x\,(x \in A) \wedge \bigwedge x\,(x \in B)]$.

Con el fin de que no proliferen las notas, nos abstendremos en muchos casos de dar la traducción de las leyes cuantificacionales a lógica de clases.

275 Nótese que esta ley tiene forma de condicional. En efecto: la inversa no es formalmente verdadera.

276 Ocurre aquí lo mismo que en el caso anterior.

277 Podríamos habernos sentido tentados, por inercia, a admitir una «Ley de distribución del cuantificador universal por la disyunción», que tendría esta forma:

$$\bigwedge x\,(Px \vee Qx) \rightarrow (\bigwedge x\, Px \vee \bigwedge x\, Qx).$$

Pero no. De un enunciado como «Todos los filósofos son o confusos o triviales» no podría deducirse el enunciado «O todos los filósofos son confusos o todos los

16. $\bigvee x\,(Px \wedge Qx) \rightarrow (\bigvee x\, Px \wedge \bigvee x\, Qx)$

Ley de distribución del cuantificador particular por la conjunción[278*].

17. $\bigvee x\,(Px \vee Qx) \leftrightarrow (\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx)$.

Ley de distribución del cuantificador particular por la disyunción.

18. $(\bigvee x\, Px \rightarrow \bigvee x\, Qx) \rightarrow \bigvee x\,(Px \rightarrow Qx)$.

Ley de contracción del cuantificador particular por el condicional.

19. $[\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx) \wedge \bigwedge x\,(Qx \rightarrow Rx)] \rightarrow \bigwedge x\,(Px \rightarrow Rx)$

Ley de transitividad del condicional para predicados monádicos[279].

20. $[\bigwedge x\,(Qx \rightarrow \neg\, Rx) \wedge \bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg\, Rx)$

Ley que corresponde al modo silogístico «*Celarent*».

---

filósofos son triviales». En efecto: para falsar el primero habría que encontrar —cosa harto fácil— un filósofo que no fuera ni confuso ni trivial. En cambio, para falsar el segundo bastaría con encontrar, por una parte, un filósofo que no fuera confuso, y, por otra parte, un filósofo que no fuera trivial.

Traduciendo la ley a lógica de clases se ve con bastante claridad la diferencia. No es lícito pasar de

$$\bigwedge x\,(x \in A \vee x \in B)$$

a

$$\bigwedge x\,(x \in A) \vee \bigwedge x\,(x \in B),$$

porque el primer enunciado dice: para todo x, o x pertenece a la clase A, o pertenece a la clase B, o pertenece a ambas. Y el segundo dice: o *todos* los x pertenecen a la clase A, o *todos* los x pertenecen a la clase B, o *todos* los x pertenecen a ambas.

278* La ley tiene forma de condicional porque la inversa no es verdadera. Veámoslo en lógica de clases: de

$$\bigvee x\,(x \in A) \wedge \bigvee x\,(x \in B)$$

no se puede inferir

$$\bigvee x\,(x \in A \wedge x \in B).$$

En efecto: el x que pertenece a A y el x que pertenece a B según el primer esquema pueden ser dos x distintos.

279 A esta ley se la conoce también con el nombre de «Ley del silogismo». Su estructura, en efecto, es la del modo silogístico conocido con el nombre de «*Barbara*», perfecto entre los perfectos, según Aristóteles. Hay que advertir únicamente que en la presentación tradicional se altera el orden de las premisas, por lo cual, en rigor, el esquema correspondiente al modo *Barbara* sería

$$[\bigwedge x\,(Qx \rightarrow Rx) \wedge \bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \bigwedge x\,(Px \rightarrow Rx).$$

21. $[\bigwedge x (Qx \rightarrow Rx) \wedge \bigvee x (Px \wedge Qx)] \rightarrow \bigvee x (Px \wedge Rx)$

Ley que corresponde al modo silogístico «*Darii*».

22. $[\bigwedge x (Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \bigvee x (Px \wedge Qx)] \rightarrow \bigvee x (Px \wedge \neg Rx)$

Ley que corresponde al modo silogístico «*Ferio*»[280].

23. $[\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \wedge Pa] \rightarrow Qa.$

Modus ponendo ponens para predicados monádicos[281*].

24. $[\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa$

Modus tollendo tollens para predicados monádicos.

25. $[\bigwedge x (Px \vee Qx) \wedge \neg Pa] \rightarrow Qa$

Ley de inferencia de la alternativa para predicados monádicos.

26. $\bigwedge x\, Px \rightarrow Pa$

Ley de especificación.

27. $Pa \rightarrow \bigvee x\, Px$

Ley de particularización[282].

---

[280] Como hemos ido indicando, las leyes 19 (con las premisas trastocadas), 20, 21 y 22 corresponden a los cuatro modos silogísticos de la primera figura. Otro tanto cabría hacer con los modos de las figuras restantes. Es preciso, sin embargo, señalar lo siguiente: hay modos que no podrían admitirse en nuestro cálculo de predicados monádicos. Son aquellos que —como *Darapti*, por ejemplo, o *Felapton*— parten de premisas universales para llegar a una conclusión particular. Si, como hemos dicho, no es lícito el paso de un esquema de la forma '$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$' a otro de la forma '$\bigvee x (Px \wedge Qx)$' no sería válido, por ejemplo, el citado modo *Darapti*, cuya estructura podría representarse así:

$$[\bigwedge x (Qx \rightarrow Rx) \wedge \bigwedge x (Qx \rightarrow Px)] \rightarrow \bigvee x (Px \wedge Rx).$$

[281*] En lógica de clases,

$$[(A \subset B) \wedge a \in A] \rightarrow (a \in B)$$

o bien

$$[\bigwedge x (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (a \in A)] \rightarrow (a \in B).$$

[282] Como puede verse, las leyes 23-27 se distinguen de las anteriores en que en ellas figuran símbolos como '*a*', que antes hemos llamado '*constantes* individuales'. La presencia de esos símbolos pudiera resultar engañosa. En efecto: se sabe que cada constante individual

Finalizaremos con la siguiente observación. A las leyes de la lógica de enunciados les llamábamos, siguiendo a todos los que han seguido a Wittgenstein, «tautologías». El nombre se justificaba por el hecho de que en ellas la conclusión —el consecuente del condicional, o del bicondicional, que las expresa— no hace sino decir de otro modo lo que ya está dicho en las premisas. Sería un error, sin embargo, seguir dando el nombre de tautologías a las leyes de la lógica de predicados monádicos —y el error se haría mayor, si cabe hablar así, a medida que progresáramos en la lógica—, porque no todas ellas son tautológicas en este sentido. Mejor será, entonces, darles otro nombre: por ejemplo, el de «esquemas válidos de la lógica de predicados monádicos».

C) La lógica de los predicados poliádicos

Exposición de motivos

> ... «Soy detective privado y tengo mi licencia desde hace bastante tiempo. Soy un tipo solitario, no estoy casado, estoy entrando en la edad madura y no soy rico. He estado en la cárcel más de una vez y no me ocupo de divorcios. Me gusta la bebida, las mujeres (...) y algunas otras cosas. No soy muy del agrado de los polizontes (...). Soy hijo natural, mis padres han muerto, no tengo hermanos ni hermanas, y si alguna vez llegan a dejarme tieso en una callejuela oscura (...), nadie, ni hombre ni mujer, sentirá que ha desaparecido el motivo y fundamento de su vida.»[283]

Dicho de otro modo:

$$Da \wedge Ta \wedge Sa \wedge \neg \bigvee x (Cax) \wedge Ea \wedge \neg Ra \wedge E'a \wedge \bigwedge x (D'x \rightarrow \rightarrow \neg Oax) \wedge \bigvee x \bigvee y \bigvee z \bigvee w (Bx \wedge My \wedge \neg Bz \wedge \neg Mz \wedge \neg Bw \wedge \wedge \neg Mw \wedge Gxa \wedge Gya \wedge Gza \wedge Gwa) \wedge \bigwedge x (Px \rightarrow \neg Aax) \wedge \bigwedge x \bigwedge y [(P'xa \wedge M'ya) \rightarrow \neg Cxy \wedge M''x \wedge M''y] \wedge \neg \bigvee x \neg \bigvee y\ [Bx \wedge My) \wedge \wedge (Hxa \vee Hya)] \wedge \bigvee x [(T'xa) \rightarrow \neg \bigvee y (By \vee My) \wedge Sy]$$[284].

---

designa un determinado individuo, ése y no otro. Esto pudiera interpretarse de tal modo que llevara a pensar que lo que se dice en, por ejemplo, la ley número 26 es que si todos los x poseen el atributo designado por P, entonces lo posee el individuo a, el concreto individuo a. Y no es así: lo que se dice es que si de *todos* los individuos de un cierto universo puede predicarse un determinado atributo, entonces ese atributo puede predicarse también de uno *cualquiera* de ellos: de a, por ejemplo. El símbolo 'a' no es propiamente una variable —ya que no podríamos cuantificarla—, pero tampoco una constante, un nombre concreto. Es lo que se llama un *parámetro*, una especie de nombre imaginario.

[283] Raymond Chandler: *El largo adiós*. V. cast. de J. A. Lara. Barcelona, Barral Editores, 1972, pág. 114. El que habla es, naturalmente, Phil Marlowe».

[284] Es decir: «a es detective privado y a tiene su licencia desde hace bastante tiempo y a es un tipo solitario y no hay ningún x tal que a esté casado con x y a está entrando

Como puede verse, si el lenguaje lógico no dispusiera de predicados poliádicos nadie podría relatar en él su vida. Nadie podría, por ejemplo, formular en símbolos lógicos su estado civil, expresar sus odios y sus amores, etc.

Sin la introducción de predicados poliádicos tampoco sería posible —y esto sí que parece necesario— traducir al simbolismo lógico los más sencillos enunciados de la ciencia. No sería posible enunciar siquiera que 2 es menor que 3.

Si la lógica no dispusiera de los recursos necesarios para discernir predicados poliádicos en los enunciados de la ciencia o de la vida, muchos serían los razonamientos que, siendo formalmente válidos, se verían privados de su reconocimiento como tales.

Problemas de esquematización

Lo dicho respecto de la traducción de enunciados del lenguaje ordinario al simbolismo de la lógica de predicados monádicos puede decirse también aquí, y a mayor abundamiento. Nada de traducción mecánica: necesidad de actualización simultánea de la competencia lingüística y la competencia lógica.

Veamos unos cuantos ejemplos. Sea el enunciado

Actualmente no existe en la revolución persona más importante que Ulianov[285].

en la edad madura y *a* no es rico y *a* ha estado en la cárcel más de una vez y para todo *x*, si *x* es un divorcio entonces *a* no se ocupa de *x* y hay algún *x* tal que *x* es una bebida y *x* gusta a *a* y hay algún *y* tal que *y* es una mujer e *y* gusta a *a* y hay algún *z* y algún *w* que no son bebidas ni mujeres y que gustan a *a*, y para todo *x*, si *x* es un polizonte, entonces *a* no es muy del agrado de *x*, y para todo *x* y para todo *y* si *x* es padre de *a* e *y* es madre de *a* entonces *x* e *y* no estuvieron casados y *x* está muerto e *y* está muerta, y no hay ningún *x* ni ningún *y* tales que si *x* es varón e *y* mujer, *x* sea hermano de *a* o *y* hermana de *a*, y si hay algún *x* tal que *x* deja tieso a *a* en una callejuela oscura, entonces no habrá ningún *y*, sea varón o sea mujer, que sienta que ha desaparecido el motivo y fundamento de su vida».

Se han utilizado símbolos como *E'* o *M''* ante la presencia de expresiones predicativas que comienzan en el lenguaje ordinario con la misma letra.

Hemos prescindido, habida cuenta de los propósitos, puramente ilustrativos, que nos animaban a esquematizar este texto, de algunas sutilezas. Por ejemplo, el enunciado 'He estado en la cárcel más de una vez' podría simbolizarse más detalladamente con ayuda del predicado de identidad, al que dedicaremos algunas páginas más adelante. Del mismo modo, la afirmación 'Soy un tipo solitario' podría interpretarse como si contuviera una expresión predicativa poliádica: se es solitario por respecto a los demás. Etc.

[285] Del informe del Jefe de la Dirección de Seguridad de Moscú, Zubatov, a sus superiores, en 1900 (tomado de G. Walter, *Lenin*. París, Julliard, 1950. V. cast. de R. Lamoneda. Barcelona, Grijalbo, 1967, pág. 82.

Su esquematización no ofrece grandes dificultades:

$\neg \bigvee x\,(Rx \wedge Ixa)$ ['No hay ningún *x* tal que *x* esté en la revolución y *x* sea más importante que *a*'].

O bien:

$$\bigwedge x \neg (Rx \wedge Ixa),$$

que equivale a

$$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Ixa)$$

Tampoco resulta demasiado laborioso verter en símbolos el enunciado

No hay nada más desesperante que un teléfono comunicando

$\neg \bigvee x\,[\bigwedge y\,(Ty \rightarrow Dxy)]$ ['No hay ningún *x* tal que, para todo *y*, si *y* es un teléfono comunicando, entonces *x* sea más desesperante que *y*'].

La frase

Hombre soy y nada humano me es ajeno (Terencio)

podría quedar, en símbolos, así:

$$Ha \wedge \bigwedge x \bigwedge y\,[(Hx \wedge Ryx) \rightarrow (\neg Axa \wedge \neg Aya)]$$ [286]

Otro ejemplo:

Para el intelectual no hay nada mejor que la democracia burguesa.

[286] Es decir: '*a* es hombre, y para todo *x* y para todo *y*, si *x* es hombre e *y* es cualquier cosa que guarde relación con un hombre, entonces *x* no es ajeno a *a* e *y* tampoco es ajeno a *a*'.

En símbolos:

$$\bigwedge x\,[Ix \rightarrow \neg \bigvee y\,(Ry \wedge Myax)]$$

['Para todo x si x es intelectual, entonces no hay ningún y tal que y sea un régimen político e y sea mejor que la democracia burguesa (a) para x'].

Tres variables —referentes a comunistas, países y movimientos revolucionarios— habríamos de manejar si quisiéramos esquematizar el siguiente enunciado:

Los comunistas apoyan en todos los países todo movimiento revolucionario en contra del orden social y político existente (Marx-Engels)

En símbolos:

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,[(Cx \wedge Py \wedge Rz) \rightarrow Axzy]^{287}$$

Veamos —buscando siempre la heterogeneidad— dos nuevos casos. Sea la siguiente greguería de Gómez de la Serna:

El que ha hecho un empalme de dos flexibles ha sido cirujano de la electricidad.

Su esquema sería:

$$\bigwedge x\,[\bigvee y \bigvee z\,(Fy \wedge Fz \wedge Exyz) \rightarrow Cx]^{288}$$

En la *Biblia* (concretamente, en el *Exodo*) leemos:

El que en ese día [Yavé se refiere al séptimo día, día de descanso] haga un trabajo cualquiera, será castigado con la muerte.

---

[287] Es decir: 'Para todo x, y y z, si x es una organización comunista, y un país y z un movimiento revolucionario en contra del orden social y político existente, entonces x apoya a z en y'.

[288] Es decir: 'Para todo x, si hay algún y y algún z tal que x es un flexible e y es un flexible y x empalma y con z, entonces x ha sido cirujano de la electricidad'.

En versión simbólica:

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,[(Ix \wedge Ty \wedge Sz \wedge Hxyz) \rightarrow Mx]^{289}$$

Cuando entramos en lógica de predicados poliádicos —es decir, cuando tenemos que vérnolas con enunciados en los que bien pudieran aparecer dos o más variables de individuo diversamente cuantificadas— hay que extremar el rigor no sólo en lo que se refiere al tipo específico de cuantificación que conviene a cada variable, sino también en relación con lo que se ha venido llamando *alcance* de un cuantificador, entendiendo por tal la secuencia de símbolos a la que afecta, es decir, la longitud de fórmula que abarca. En los ejemplos que siguen se plantearán problemas de este tipo.

Tomemos una afirmación de Quine:

Ningún experimento zanjará nunca una cuestión ontológica.

Traducir este enunciado al lenguaje lógico exige el concurso de dos variables: una cuyo campo de valores sea el conjunto o clase de los experimentos, y otra cuyo campo de valores sea la clase de las cuestiones ontológicas. ¿Cómo proceder? ¿Cuantificando universalmente la primera y particularmente la segunda, ya que se habla de '*una* cuestión ontológica'? Es obvio que no. En este caso, 'una' equivale a 'cualquier'. Quizá, pues, una forma correcta de esquematizar ese enunciado fuera ésta:

$$\bigwedge x \bigwedge y\,[(Ex \wedge Cy) \rightarrow \neg Zxy]$$

['Para todo x y para todo y, si x es un experimento o y una cuestión ontológica, entonces no es el caso que x zanje y'].

Aunque tal vez fuera mejor esta otra:

$$\bigwedge x\,[Cx \rightarrow \neg \bigvee y\,(Ey \wedge Zyx)]$$

Un ejemplo algo más complicado sería el siguiente:

Siempre hay un español que inventó las cosas antes que sus inventores reconocidos

---

[289] 'Para todo x, y y z, si x es un hijo de Israel, y es un trabajo y z es un santo séptimo día, y x hace y en z, entonces x será castigado con la muerte'.

En este enunciado se hace referencia a tres distintos conjuntos de individuos: el de los españoles, el de los inventos, y el de los inventores reconocidos. Habrá, pues, que cuantificar tres variables individuales. Posiblemente así:

$$\bigwedge x \bigwedge y [(Ix \wedge Ryx) \rightarrow \bigvee z (Ez \wedge Tzxy)]$$ [290]

Dice Descartes, en la Segunda Parte del *Discurso del Método:*

> No es posible imaginar nada extraño e increíble que no haya sido dicho por algún filósofo.

En esquema:

$$\neg \bigvee x [(Ex \vee Ix) \wedge \neg \bigvee y (Fy \wedge \neg Dyx)]$$ [291]

O, dicho de otro modo:

$$\bigwedge x [(Ex \vee Ix) \rightarrow \bigvee y (Fy \wedge Dyx)]$$

El problema del alcance de los cuantificadores, del que hemos venido viendo casos, se presenta con mayor claridad aún en afirmaciones como la siguiente (atribuíble, en fecha como la de hoy[292] al Presidente de U. S. A.):

> Si un indochino osara tocar siquiera a un soldado norteamericano, todas nuestras fuerzas en Viernam se alzarían indignadas.

A nuestro modo de ver, una esquematización adecuada sería la siguiente:

$$[\bigvee x \bigvee y (Ix \wedge Ny \wedge Oxy)] \rightarrow \bigwedge y (Ay)$$

['Si hay algún x y algún y tal que x es indochino e y norteamericano y x osa tocar a y, entonces todos los y se alzarían indignados'].

[290] Es decir: 'Para todo x y todo y, si x es un invento e y es su inventor reconocido, entonces hay algún z tal que z es español y z inventó x antes que y'.

[291] 'No hay ningún x tal que x sea una opinión extraña y/o increíble y tal que no haya algún y tal que y sea filósofo e y no haya dicho x'.

[292] 30 de abril de 1975.

Independientemente de que pudiera simbolizarse de otro modo, el enunciado nos sirve de ejemplo. En él puede verse cómo el cuantificador particular que afecta a la variable y tiene como alcance tal sólo el antecedente de la fórmula, hallándose el consecuente afectado por la cuantificación universal de y.

El enunciado

> Cuando uno ha visto un muerto los ha visto todos[293]

plantea un problema similar. Tomemos el antecedente de lo que, presumiblemente, es un condicional. El antecedente es 'uno ha visto un muerto'. Ese 'uno' es un uno cualquiera. Así, pues, en símbolos:

$$\bigwedge x \bigvee y (My \wedge Sxy) \ldots$$

['Para todo x, si hay algún y tal que y está muerto y x ha visto a y en ese estado, entonces...'].

Y el consecuente sería

$$\bigwedge x \bigwedge y (My \rightarrow Sxy)$$

['... x ha visto a todo y que esté muerto'].

El enunciado entero tendría, pues, esta forma

$$\bigwedge x \{[\bigvee y (My \wedge Sxy)] \rightarrow \bigwedge y (My \rightarrow Sxy)\}$$

Obsérvese la importancia que tienen en este caso los paréntesis, corchetes, etc., para indicar el alcance de los cuantificadores. El cuantificador universal que afecta a x alcanza a toda la fórmula. En efecto: la fórmula entera es —o pretende ser— verdadera de todo x: *todo* individuo que ha visto un muerto los ha visto todos. En cambio, con y es distinto: el consecuente de la fórmula aspira a ser verdadero de todos los y, y el antecedente, de *al menos uno*. Etc.

Procedimientos de decisión en lógica de predicados poliádicos

Dada cualquier expresión bien formada de la lógica de enunciados, podíamos, por el método de las tablas de verdad (entre otros) determinar

[293] Interpretemos la expresión 'un muerto' como 'algún muerto', aunque quizá fuera mejor decir —para lo cual no poseemos todavía los suficientes recursos expresivos— 'un solo muerto'.

inequívocamente si se trataba o no de una tautología. En lógica de predicados monádicos contábamos asimismo con más de un procedimiento para solventar el problema de si una fórmula dada era o no un esquema válido.

No existe, en lógica de predicados poliádicos, un procedimiento de decisión en este sentido: no existe —por principio— ningún procedimiento de decisión que pueda aplicarse con fruto a *toda* fórmula de la lógica de predicados poliádicos. *A fortiori*, no existe ningún procedimiento de decisión que valga para la lógica de primer orden considerada como un todo. *A fortiori*, no existe ningún procedimiento de decisión para la lógica formal tomada en su conjunto.

Contamos, eso sí, con procedimientos de alcance parcial, es decir, con métodos que permiten solventar el problema de la validez de ciertos tipos de fórmulas predicativas poliádicas. Su exposición, sin embargo, excede de las pretensiones de este libro, y el hecho de no llervala a cabo no afecta grandemente a su propósito fundamental, repetidas veces expresado.

Leyes de la lógica de predicados poliádicos[294]

Entre los esquemas válidos de la lógica de predicados poliádicos que podríamos enumerar hay algunos que no son sino adaptaciones triviales de leyes ya conocidas. Así, por ejemplo:

$$\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy \leftrightarrow \neg \bigvee x \bigvee y \neg Pxy^{295}$$

(Que sería la versión con predicados poliádicos de una de las *Leyes de interdefinición de los cuantificadores.*)

$$\bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Qxy) \leftrightarrow \neg \bigvee x \bigvee y (Pxy \wedge \neg Qxy)$$

(Versión poliádica de una de las *Leyes de oposición.*)

$$\bigwedge x \bigwedge y \neg (Pxy \wedge \neg Pxy)$$

(Versión, para predicados poliádicos, de la *Ley de contradicción.*)

$$[\bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Qxy) \wedge \bigwedge x \bigwedge y (Qxy \rightarrow Rxy)] \rightarrow$$
$$\rightarrow \bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Rxy)$$

(*Ley de transitividad del condicional.*)

---

[294] En lo que sigue, y salvo indicación en contrario, nos ocuparemos exclusivamente de predicados *diádicos*.

[295] Téngase en cuenta que al escribir '$\neg \bigvee x \bigvee y$' se entienden negados los dos cuantificadores.

$$[\bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Qxy) \wedge Pab] \rightarrow Qab$$

(*Modus ponendo ponens* para predicados diádicos.)

$$(\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy) \rightarrow Pab$$

(*Ley de especificación* para predicados diádicos.)

$$Pab \rightarrow \bigvee x \bigvee y\, Pxy$$

(*Ley de particularización* para predicados diádicos.)

Etcétera.

A ellas añadiríamos las siguientes leyes específicas de esta sección de la lógica de predicados de primer orden:

1. $\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy \leftrightarrow \bigwedge y \bigwedge x\, Pxy$
2. $\bigvee x \bigvee y\, Pxy \leftrightarrow \bigvee y \bigvee x\, Pxy$
3. $\bigvee x \bigwedge y\, Pxy \rightarrow \bigwedge y \bigvee x\, Pxy$[296]

Todas ellas son *Leyes de permutación de los cuantificadores.*

A qué llamamos «lógica de relaciones»

Volvamos atrás. Una frase como

Dan era menchevique

podía interpretarse de dos modos: o bien como el enunciado de que cierto individuo posee una determinada propiedad, o bien como la aserción de que el individuo en cuestión pertenece a una clase dada. Según la interpretación que elijamos, la frase tomará, en lenguaje lógico, respectivamente, la forma

$$Ma$$

---

[296] Si esta ley tiene forma de condicional es porque su conversa no se cumple. Es decir, que

$$\bigwedge y \bigvee x\, Pxy \rightarrow \bigvee x \bigwedge y\, Pxy$$

no es un esquema válido, verdadero para todas las interpretaciones. Un ejemplo bastará. Supongamos que '*Pxy*' significa '*x* es padre de *y*'. En ese caso, el antecedente se leería: 'Para todo *y*, hay algún *x* tal que *x* es el padre de *y*' (Es decir: todo el mundo tiene un padre). El consecuente, por su parte, rezaría así: 'Hay algún *x* tal que para todo *y*, *x* es el padre de *y*' (Es decir: hay alguien que es el padre —biológico— de todo el mundo). No parece que el paso de una a otra afirmación sea lógicamente justificable. Si lo fuera, podríamos pasar, por ejemplo, de 'Todo tiene una causa' a 'Hay una causa de todo', que no es, evidentemente, lo mismo.

o la forma

$$a \in \acute{A}$$

Adoptando los términos clásicos «*intensión*» (o «*comprehensión*») y «*extensión*», cabría decir que cada clase es la extensión de un predicado (en la medida en que reúne a todos los individuos de los que ese predicado es verdadero), y que los predicados son clases vistas en su intensión (en la medida en que, sabiendo lo que significa un predicado, sabemos lo que significa pertenecer a la clase correspondiente). Diríamos entonces, en general, que la lógica de clases es una versión extensional de la lógica de predicados monádicos.

Tomemos ahora una expresión como

$$Pab$$

Un predicado seguido de dos nombres de individuo. Un predicado, pues, diádico. ¿No sería razonable interpretar esa expresión como si enunciara la existencia de una relación entre a y b? ¿Qué manera más natural hay de interpretar los predicados poliádicos que como expresión de *relaciones* entre dos o más individuos? Incluso cabría preguntar: ¿qué otra manera hay de interpretarlos?

Conocemos otra: un predicado n-ádico es una expresión que con n nombres de individuo compone un enunciado. Un predicado es un *functor* con uno o más argumentos.

Llamábamos, recuérdese, «enunciados abiertos» —o «funciones de nombres», o, como se las denominó en su origen, «funciones proposicionales»— a expresiones que no son enunciados —en la medida en que no tienen un valor de verdad—, pero que pueden convertirse en tales por sustitución de sus variables o cuantificación de éstas.

Mediante la consideración de enunciados abiertos como

x hizo encarcelar a y
x cambió y por z
x se alió con y y con z en contra de w

resulta natural concebir los predicados poliádicos como functores de dos o más argumentos, como fragmentos de lenguaje que se convierten en enunciados cuando se rellenan sus huecos —que siempre serán dos o más— con nombres de individuo, o se procede a la cuantificación de sus múltiples variables.

Quedémonos, de entre los predicados poliádicos, con los del tipo más sencillo: los predicados diádicos.

Un predicado como '... aborrece a ...' es, pues, en un sentido, un functor de dos argumentos.

¿No es también, sin embargo, un modo de designar una relación dos individuos?

La lógica de relaciones es, por tanto, el resultado de considerar de otra manera la lógica de los predicados poliádicos.

Se ha dicho que la lógica de relaciones es a la lógica de predicados poliádicos lo que a la lógica de predicados monádicos es la lógica de clases. Y digamos —con una observación que por un momento resultará críptica— que es la lógica de clases la que permite establecer esa correspondencia entre predicados poliádicos y relaciones.

Efectivamente: en lógica, las relaciones se consideran *en extensión*. Quiere decirse: en lógica, las relaciones no se definen en virtud de lo que, por así decir, «significan», sino en términos del conjunto de pares de individuos entre los que se dan. Veámoslo con un ejemplo. Sea el enunciado abierto

x leyó y

Desde el punto de vista lógico esa relación no se definiría mediante la explicación de en qué consiste la tarea de leer, de qué significa la relación que se entabla entre el lector y el texto, sino que quedaría caracterizada como aquella relación que media entre todos los x y todos los y tales que x leyó y. Dicho de otro modo, y con otro ejemplo: la relación que vertebra el enunciado abierto 'x está a la izquierda de y' se reduce, en lógica, a la clase de todos los x y todos los y tales que el primero está a la izquierda del segundo.

Así, pues, las relaciones diádicas son clases de pares. Hasta ahora no hemos considerado sino clases formadas por individuos aislados entre sí. Ahora hemos de vérnolas con clases de pares. Con clases de pares *ordenados*, es decir, dados en un determinado orden.

En efecto: tomemos un enunciado abierto como

x es mayor que y.

Puedo cerrarlo sustituyendo x e y por nombres de individuo. Ahora bien: si, por ejemplo, sustituyo 'x' por '3' e 'y' por '7' obtendré un enunciado falso, mientras que si sustituyo la primera variable por '7' y la segunda por '3' habré construido un enunciado verdadero. El orden no es, pues, indiferente.

El par *no ordenado* formado por a y b lo representaremos así:

$$\{a, b\}$$

El par *ordenado* compuesto de esos mismos individuos tendría, en cambio, este otro aspecto:

$$\langle a, b\rangle$$

Las relaciones diádicas se entienden como *clases de pares ordenados*. En suma: el predicado diádico '... denunció a ...' —representado por '*D*'— puede entenderse como la relación —llamémosla '*R*'— que media entre todos los *x* y todos los *y* tales que *x* denunció a *y*. En símbolos:

$$R =_{Df.} \{x, y \mid Dxy\}$$ [297]

Es decir: la relación *R* es la clase de los pares ordenados $\langle x, y \rangle$ tales que hacen verdadero el enunciado abierto '*Dxy*'.

Para no apartarnos de una práctica bien establecida, utilizaremos como símbolos de relaciones las letras *R*, *S*, *T*. Por otra parte, y dado que, intuitivamente, una relación es algo que se da *entre* individuos, parece preferible[298] evocarlo escribiendo

$$aRb$$

mejor que

$$Rab$$ [299]

En lo que sigue vamos a desarrollar un tratamiento de los predicados diádicos en términos de relaciones, proporcional al que, en las notas con asterico, hemos dedicado, mientras exponíamos la lógica de enunciados y la de predicados monádicos, a la lógica de clases.

Repitamos: una relación cualquiera, *R*, es la relación que media entre todos aquellos *x* y todos aquellos *y* tales que '*xRy*' es verdadero:

$$R =_{Df.} \{x, y \mid xRy\}$$

Definimos a continuación las siguientes nociones:

1. *Complemento* de una relación *R*:

$$-R = \{x, y \mid \neg\, xRy\}$$

El complemento de una relación se define, pues, como el conjunto o clase de pares ordenados entre los que no se da esa relación. Así, por ejemplo, si *R* es la relación 'estar casado con' (que se definirá

[297] Si escribiéramos $\{\langle x, y \rangle \mid Dxy\}$ podría parecer redundante, por cuando la segunda parte de la expresión ya especifica que es necesario que se haga verdadero el enunciado abierto '*Dxy*', y no '*Dyx*'.

[298] Al menos para relaciones diádicas, que son, ya lo hemos dicho, las que casi exclusivamente vamos a considerar.

[299] Ya Wittgenstein, en el *Tractatus Logico-Philosophicus*, pone de relieve el carácter «pictórico» de una expresión como '*aRb*'.

como la clase de todos los *x* y todos los *y* tales que *x* está casado con *y*), el complemento de *R*, $-R$, será la clase de todos los *x* y de todos los *y* tales que *x no* está casado con *y*, es decir, la clase de todos los pares de individuos entre los que no se da la relación matrimonial.

2. *Suma o unión (absoluta)*[300] de relaciones.

Dadas dos relaciones *R* y *S*, podemos decir que

$$R \cup S =_{Df.} \{x, y \mid (xRy \vee xSy)\}$$

La suma lógica de dos relaciones es la clase de todos los pares ordenados entre los que se da o bien sólo la primera relación, o bien tan sólo la segunda, o bien ambas. Es claro que la unión de dos relaciones da como resultado una nueva relación. Así, si, por ejemplo, interpretamos *R* como la relación 'hermano de' y *S* como la relación 'hermana de', entonces la relación suma, llamémosla *T*, será la relación 'hermano-o-hermana de'.

3. *Producto absoluto*[300] de relaciones.

Dadas dos relaciones, *R* y *S*, podemos decir que

$$R \cap S =_{Df.} \{x, y \mid (xRy \wedge xSy)\}$$

El producto lógico de dos relaciones es la clase de todos los pares ordenados entre los que se da la primera *y también* la segunda. Así, si *R* es la relación 'hermano de' y *S* es la relación 'mayor que', su producto absoluto será la relación *T*: 'hermano mayor de'.

4. *Inclusión* de relaciones

$$R \subset S =_{Df.} \bigwedge x \bigwedge y\, (xRy \rightarrow xSy)$$

Una relación está incluida en otra cuando si la primera se da entre dos individuos, entonces también se da la segunda. Por ejemplo: la relación 'estrangulador de' está incluida o contenida en la relación 'asesino de'. Todo el que estrangula a otra persona la asesina, aunque la inversa no es verdadera, pues son muchas las formas de matar.

5. *Identidad* de relaciones

$$R = S =_{Df.} \bigwedge x \bigwedge y\, (xRy \leftrightarrow xSy)$$

Diríamos que dos relaciones son idénticas cuando, si entre dos individuos se cumple la primera, se cumple asimismo la segunda, *y a la*

[300] Luego se verá la razón de este adjetivo.

inversa. Así, la relación 'hermano de' y la relación 'hijo del mismo padre y de la misma madre que' son idénticas.

Hasta aquí es patente el paralelismo —que el uso de los mismos símbolos ayuda a conservar— entre la lógica de relaciones y la lógica de clases. Apurémoslo mediante dos consideraciones. En primer lugar, del mismo modo que en lógica de clases hablábamos de clase universal y clase vacía, hablaremos ahora de *relación universal* y *relación vacía*.

6. *Relación universal* es la que relaciona a todo individuo con todo individuo dentro de un determinado universo del discurso. Es, dicho de otro modo, la relación que se mantiene entre cualesquiera dos individuos del conjunto universo.

7. *Relación vacía* es la que no se da entre ningún par de individuos del conjunto que constituye el universo del discurso.

En segundo lugar, repetiremos aquí una observación que hacíamos a propósito de las operaciones con clases. Es preciso establecer una línea divisoria entre, de una parte, el complemento, la suma y el producto (absolutos) de relaciones, y, de otra parte, la inclusión y la identidad.

El complemento, la suma y el producto son, como se ha dicho, *funciones de relaciones a relaciones*. Son operaciones que sirven para componer nombres de relaciones con nombres de relaciones. Al aplicar, por ejemplo, el símbolo '$-$' al símbolo, R, de una relación, lo que obtengo es el nombre de una nueva relación: '$-R$', 'la relación complemento o complementaria de R'. Al escribir el símbolo '$\cup$' entre los nombres de dos relaciones he compuesto el nombre de una nueva relación: '$R \cup S$', 'la relación suma de R y S'. Etc.

Cosa muy distinta ocurre con la inclusión y la identidad. Ellas no sirven para formar nombres de relaciones más complejas, sino para *componer enunciados sobre relaciones*. Se las llama, por ello, *funciones de relaciones a enunciados*. Al escribir el símbolo '$\subset$' o el símbolo '$=$' entre dos nombres de relaciones, no estoy construyendo el nombre de una relación nueva. Estoy haciendo una afirmación acerca de esas dos relaciones: estoy enunciando que una está incluida en otra, o diciendo que las dos son la misma.

Claramente se ve la distinción si se piensa que expresiones como '$-R$', '$R \cup S$' o '$R \cap S$' no tienen valor de verdad: son, sencillamente, nombres, y los nombres no son ni verdaderos ni falsos. Sí tendrían valor de verdad —sin más que sustituir R y S por nombres de relaciones concretas— expresiones como '$R \subset S$' o '$R = S$'. Porque estas expresiones son enunciados.

La lógica de relaciones alberga, sin embargo, otros muchos conceptos y operaciones que *no tienen paralelo en la lógica de clases*. Vamos a enumerar y definir algunos. A pesar de su heterogeneidad, hemos optado por componer con ellos una única lista que prolonga la anterior.

8. *Producto relativo* de relaciones

$$R \mid S =_{Df.} \{x, y \mid \vee z\,(xRz \wedge zSy)\}$$

El producto relativo de R y S es la relación que media entre todos los x y todos los y tales que hay algún z con el que x tiene la relación R y que tiene la relación S con y.

Veamos un ejemplo.

Supongamos que se trata de definir la expresión relacional 'x es el asesino del hermano de y' (por ejemplo: 'Wan Guld asesinó al hermano del Corsario Negro). ¿Cómo hacerlo? Definirla como una relación simple —xRy— equivaldría a pasar por alto la existencia, dentro de esa expresión, de dos relaciones: 'asesino de' y 'hermano de'. ¿Cómo combinar, entonces, esas dos relaciones?

Si formáramos su producto *absoluto*, el resultado sería:

$$xRy \wedge xSy$$

No es eso, sin embargo. Porque ahí dice que x asesinó a y y que x es hermano de y. Ahí dice que x mató a su hermano.

La relación 'asesino del hermano de' es un producto *relativo* de relaciones: es la relación que media entre todos los x y todos los y tales que hay un z al que x asesinó y que es el hermano de y.

Un ejemplo algo más complicado sería el siguiente:

Claudio dio muerte al padre de Hamlet y se casó con la madre de éste.

¿Cuál es la relación entre Claudio y Hamlet? Digamos, sin dramatizar, que entre ellos hay dos relaciones que son productos relativos.

La primera relación sería la que media entre todos los x y todos los y tales que hay algún z al que x asesinó y que es el padre de y. La segunda sería la relación de todos los x y todos los y tales que hay un z con quien x contrajo matrimonio y que es la madre de y. Expresado en símbolos las dos relaciones conjuntamente, tendríamos que la relación entre ellos es

$$\{x, y \mid \vee z\,(xRz \wedge zSy) \wedge \vee w\,(xR'w \wedge wS'y)\}$$

Así, pues, la relación, llamémosla T, existente entre Claudio y Hamlet es, en rigor, el producto *absoluto* de dos productos *relativos* de relaciones.

Es posible que la definición de producto relativo de relaciones lo haga aparecer como una sutileza inútil. Es un hecho, sin embargo, que gran parte de las relaciones que cotidianamente mantenemos no son relaciones simples, ni siquiera productos absolutos, sino productos relativos

de relaciones. No es preciso ir muy lejos —no es preciso imaginar casos relacionales como 'x obtiene plusvalía del trabajo de y', 'x simpatiza con el autor de y', 'y censuró una actuación de x', etc.— pues tenemos ejemplos más próximos: 'x es sobrino de y', 'x es abuelo materno de y', etc.

Decir, por ejemplo, que x es abuelo materno de y es tanto como decir que entre x e y media una relación T que podría definirse del siguiente modo:

$$T =_{Df.} \{x, y \mid \bigvee z (xRz \wedge zSy)\}$$

Donde R es 'ser padre de' y S, 'ser madre de'.

Nótese la diferencia: si construyéramos el producto absoluto de las relaciones 'madre de' y 'padre de' obtendríamos un imposible biológico: no parece que pueda haber ningún x que sea a la vez madre y padre de alguien. En cambio, el producto relativo de esas dos relaciones sería algo tan doméstico como una abuela paterna.

9. *Suma relativa* de relaciones

$$R \mid S =_{Df.} \{x, y \mid \bigvee z (xRz \vee zSy)\}$$

Lo dicho respecto del producto relativo arroja luz sobre el concepto de suma relativa de relaciones.

10. *Relación inversa.*

Sea R la relación que media entre todos los x y todos los y de un cierto universo del discurso:

$$R =_{Df.} \{x, y \mid xRy\}$$

Pues bien: la relación inversa de R (en símbolos, $\breve{R}$) será la relación que media —repárese en el orden— entre todos esos y y todos esos x:

$$\breve{R} =_{Df.} \{y, x \mid xRy\}$$

La (relación) inversa de una relación es, pues, por así decir, su recíproca: es la relación que se obtiene cuando consideramos los términos de la relación primitiva en orden inverso. Así, si R es la relación 'doble de', su inversa, $\breve{R}$, será la relación 'mitad de'; si R es 'mayor que', $\breve{R}$ será 'menor que'; si R es 'explotador de', $\breve{R}$ será 'explotador por'; si R es 'padre de', $\breve{R}$ será 'hijo de'; y —repárese en esto— si R es 'semejante a', $\breve{R}$ será 'semejante a'.

11. *Potencias* de una relación.

Del mismo modo que podemos elevar un número al cuadrado, así también podemos, mediante el producto relativo, formar las potencias de una relación:

$$R^1 =_{Df.} R$$
$$R^2 =_{Df.} R \mid R$$
$$R^3 =_{Df.} R^2 \mid R$$

En general,

$$R^n = R^{n-1} \mid R$$

Para entender lo que significa elevar una relación a una cierta potencia, nada como considerar la relación 'padre de':

R = padre de
R^1 = padre de
R^2 = abuelo de
R^3 = bisabuelo de
R^4 = tatarabuelo de

O bien la relación 'hijo de':

R = hijo de
R^1 = hijo de
R^2 = nieto de
R^3 = bisnieto de
R^4 = tataranieto de
R^5 = chozno de
R^6 = bichozno de

Los cuatro conceptos que acabamos de ver son específicos de la lógica de relaciones. Todos ellos son *funciones de relaciones a relaciones*. Vamos a ver ahora algunos conceptos de la lógica de relaciones que tampoco tienen trasunto en lógica de clases, pero que, a diferencia de los anteriores, son *funciones de relaciones a clases*.

12. *Dominio* (*anterior*) de una relación.

Sea, una vez más, la relación R:

$$R =_{Df.} \{x, y \mid xRy\}$$

Sobre esta base puede decirse que el dominio de esa relación es la clase de todos los x tales que tienen esa relación con algún y.

En general, definiríamos el dominio de una relación como la clase de los individuos que tienen esa relación con alguien:

$$D(R) =_{Df.} \{x \mid \bigvee y\,(xRy)\}$$

Así, si R es la relación 'corruptor de', su dominio será la clase de los corruptores; si R es la relación 'madre de', $D(R)$ será la clase de las madres; si R es la relación 'vengar a', $D(R)$ será la clase de los vengadores; etc. Véase, pues, cómo la función 'D', aplicada a una relación, da como valor una clase.

13. *Dominio inverso* de una relación.

Contando, como siempre, con una relación R definida del modo acostumbrado, diremos que su dominio converso, $\breve{D}(R)$, será

$$\{y \mid \bigvee x\,(xRy)\}$$

El dominio inverso o posterior de la relación R será la clase de todos aquellos y con los que algún x mantiene esa relación. En general, por tanto, definiríamos el dominio inverso de una relación como la clase de todos los individuos con los que alguien la mantiene.

Así, si R es la relación 'compadecer a', $\breve{D}(R)$ será la clase de los compadecidos; si R es 'padre de', $\breve{D}(R)$ será la clase de los hijos; si R es la relación 'profesor de', $\breve{D}(R)$ puede entenderse como la clase de los alumnos o como la clase de las disciplinas (dependiendo de cómo se entienda la relación). Etc.

14. *Campo* de una relación.

La suma lógica del dominio anterior de una relación y de su dominio inverso recibe el nombre de *campo* de esa relación. Quiere ello decir que al campo de una relación pertenecen todos aquellos individuos tales que, o bien tienen esa relación con alguien, o bien alguien tiene esa relación con ellos, o bien ambas cosas a la vez:

$$C(R) =_{Df.} \{x \mid \bigvee y\,(xRy \lor yRx)\}$$

También aquí la aplicación de la función —en este caso, C— a una relación da como resultado una clase: sólo que en este caso la clase es la clase unión de otras dos.

Así —dicho sea volviendo a un ejemplo anterior—, al campo de la relación 'explotador de' pertenecen, de una parte, los explotadores (es decir, los miembros de su dominio); de otra parte, los explotados (es decir, los miembros de su dominio converso); y, en tercer lugar, los que explotan y a su vez son explotados. Todos, por tanto.

La lógica de relaciones tiene también sus leyes. Algunas de ellas son, por ejemplo, las siguientes:

1. $--R = R$[301]
2. $R \cup S = S \cup R$
3. $R \cap S = S \cap R$[302]
4. $R \cup S = -(-R \cap -S)$
5. $R \cap S = -(-R \cup -S)$[303]
6. $(R \subset S) \leftrightarrow (-S \subset -R)$[304]
7. $[(R \subset S) \land (S \subset T)] \rightarrow (R \subset T)$[305]
8. $[(R \mid S) \mid T] = [R \mid (S \mid T)]$[306]
9. $(R \subset S) \rightarrow [(T \mid R) \subset (T \mid S)]$
10. $\breve{\breve{R}} = R$[307]
11. $(R \subset S) \leftrightarrow (\breve{R} \subset \breve{S})$
12. $(R = S) \leftrightarrow (\breve{R} = \breve{S})$
13. $C(R) = C(\breve{R})$[308]

Etc.

Hay varias propiedades que una relación puede poseer. Caracterizaremos algunas de ellas.

Reflexividad. Se dice que una relación R es *reflexiva* cuando toda entidad está en esa relación consigo misma. Son relaciones reflexivas, por ejemplo, la de identidad (todo entre es idéntico a sí mismo), la de semejanza, etc.

Así, pues, R es reflexiva cuando y sólo cuando

$$\bigwedge x\,(xRx)$$

---

[301] Esta ley es uno de los análogos de la ley de doble negación en lógica de relaciones.

[302] Como es obvio, las leyes 2 y 3 expresan la propiedad conmmutativa de la suma y el producto absoluto de relaciones.

[303] 4 y 5 son los análogos, en lógica de relaciones, de las leyes de De Morgan.

[304] Ley de Contraposición de la inclusión de relaciones.

[305] Ley de Transitividad de la inclusión de relaciones.

[306] El producto relativo tiene, como expresa esta ley, la propiedad asociativa. Carece, en cambio, por razones obvias, de la propiedad conmutativa.

[307] Es evidente que la inversa de la inversa de una relación es esa relación misma. Cfr., la nota 301. Por otra parte, puede decirse que el complemento de la inversa de una relación es igual a la inversa de su complemento. Ejemplo: sea R la relación 'mayor que' entre números. Su inversa será la relación que hay entre todos los pares de números tales que el primero es menor que el segundo. Y el complemento de esta última relación será la que hay entre todos los pares de números tales que el primero *no es menor* que el segundo. Tomemos ahora de nuevo la relación R. Su complemento será la relación existente entre todos los x y todos los y tales que x no es mayor que y. Y la inversa de esta relación será la relación que se da entre todos los pares de números tales que el primero *no es menor* que el segundo.

[308] Evidentemente: el campo de una relación es idéntico al de su inversa.

Una relación es *irreflexiva* cuando ninguna entidad está en esa relación consigo misma. Así, R es irreflexiva si y sólo si

$$\bigwedge x \neg (xRx)$$

No es difícil encontrar ejemplos de relaciones irreflexivas: mayor que, encima de, peor que, casado con, etc.

Por último, puede ocurrir que una relación no sea ni reflexiva ni irreflexiva. Es decir: que ni es el caso que *todo* individuo esté en esa relación consigo mismo, ni es el caso tampoco que no lo esté *ninguno*. Podrá estarlo, o no estarlo. Hablaremos entonces de relaciones *no-reflexivas*. Puesto que una relación no-reflexiva es la que *ni* es reflexiva *ni* es irreflexiva, parece adecuado decir que R es no-reflexiva si y sólo si

$$[\bigwedge x (xRx)] \downarrow [\bigwedge x \neg (xRx)]^{309}$$

Relaciones no-reflexivas serían, por ejemplo, la de ensalzar a (uno puede ensalzarse a sí mismo, pero ni está prohibido ni es obligatorio), estar satisfecho de, asesinar a (puesto que cabe el suicidio), cuadrado de (pues tenemos el caso del 1), etc.

Simetría. Se dice que una relación R es *simétrica* cuando

$$\bigwedge x \bigwedge y (xRy \rightarrow yRx)$$

Una relación es simétrica cuando, si se da entre x e y, se da también entre y y x. Relaciones simétricas son, por ejemplo, las de identidad y semejanza, la de vecino de, la de casado con, la de compatible con, etc.

Nótese que cuando una relación es simétrica, su inversa es ella misma.

Una relación R es *asimétrica* cuando

$$\bigwedge x \bigwedge y (xRy \rightarrow \neg yRx)$$

No faltan ejemplo: mayor que, padre de, más desagrable que, marido de, amo de, etc.

Y, ¿qué decir de una relación como 'amar a'? Diremos que hay amores correspondidos, y otros que no lo son. Lo cual es tanto como decir que la relación '... ama a ...' no es ni simétrica ni asimétrica. Será *no-simétrica*. Utilizando, como antes, la función flecha, diremos que una relación R es no-simétrica cuando

$$[\bigwedge x \bigwedge y (xRy \rightarrow yRx)] \downarrow [\bigwedge x \bigwedge y (xRy \rightarrow \neg yRx)]$$

[309] Recuérdese el sentido de la función flecha, que sólo da el valor 1 cuando se aplica a los argumentos 0-0.

Son también relaciones no-simétricas las siguientes: odiar a, hablar mal de, admirar a, etc.

Transitividad. Una relación R *es transitiva* cuando

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z [(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz]^{310}$$

Relaciones transitivas son, por ejemplo, una vez más, las de identidad y semejanza. También lo es la relación 'mayor que'; y asimismo lo son 'superior a', 'más demente que', 'preferible a'. El condicional —es decir, la relación '... es condición suficiente de ...' entre enunciados— es también una relación transitiva. Y otro tanto cabe decir de la relación de inclusión entre clases o entre relaciones.

Una relación R es *intransitiva* cuando

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z [(xRy \wedge yRz) \rightarrow \neg xRz]$$

¿Relaciones intrasitivas? 'Padre de' (si a es padre de b y b lo es de c, a no es padre —sino abuelo— de c); 'contradictorio de' (si un enunciado contradice otro, y este segundo contradice un tercero, es obvio que el primero y el tercero no son contradictorios entre sí); etc.

Como era de esperar, tenemos, en tercer lugar, las relaciones que no son ni transitivas ni intransitivas: las relaciones *no-transitivas*. R es no-transitiva si

$$[\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz] \downarrow [\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z (xRy \wedge yRz) \rightarrow \neg xRz]$$

La relación 'amar a' es no-transitiva. En efecto: si a ama b y b ama a c, entre a y c puede ocurrir cualquier cosa. Que se amen no es, en todo caso, lo más probable[331]. También lo sería la relación 'amigo de' (a pesar del dicho popular); y la relación 'limítrofe con'; etc.

Compacidad. Se dice que una relación R es *compacta* cuando

$$\bigwedge x \bigwedge y [(xRy) \rightarrow \bigvee z (xRz \wedge zRy)]$$

Dicho de otro modo: una relación R es compacta cuando

$$R \subset R^2$$

El ejemplo acostumbrado es el de la relación 'mayor que' entre números racionales: si un número racional es mayor que otro, entonces

[310] Con ayuda de la noción, ya explicada, de *potencia* de una relación podríamos definir la transitividad diciendo que una relación R es transitiva cuando $R^2 \subset R$.

[311] Nótese que para que la relación 'amar a' sea transitiva se requiere que al menos uno de los tres términos sea homosexual.

hay siempre un tercer número que es menor que el primero y mayor que el segundo.

Conexividad. Una relación es *conexa* cuando se da entre todo par de objetos (distintos entre sí) pertenecientes a su campo. Así, pues, la relación R es conexa si

$$\bigwedge x \bigwedge y \{[x \in C(R) \wedge y \in C(R) \wedge \neg (x = y)] \rightarrow (xRy \vee yRx)\}$$

La relación 'hermano de', por ejemplo, no es conexa. En efecto: es fácil encontrar pares de seres humanos que no son hermanos. Otra cosa sería si entendiéramos 'hermano de' como 'hermano en Cristo de'. Esa relación sí sería conexa. Es conexa asimismo la relación 'mayor que' entre números naturales. Dados dos números naturales distintos, siempre ocurrirá que uno de ellos será mayor que el otro.

Entre las propiedades de las relaciones se dan a su vez ciertas relaciones. Tomemos, por ejemplo, la tan utilizada relación 'hermano de' (entendida en su sentido más estricto, es decir, como relación entre varones). Es evidente que la relación 'hermano de' es simétrica: si a es hermano de b, b es hermano de a. Y no cabe duda de que es también transitiva: si a es hijo de los mismos padres que b y b es hijo de los mismos padres que c, entonces a y c son hijos de los mismos padres. Pensemos ahora: ¿es reflexiva la relación 'hermano de'? Sí lo es: y no sólo por la razón de que todo el mundo es hijo de sus propios padres, sino por la razón más general de que *toda relación simétrica y transitiva, cuando es conexa, es también reflexiva*[312]. He aquí una primera relación entre propiedades de relaciones.

He aquí otra: *toda relación asimétrica es irreflexiva*. Búsquense contraejemplos: no los hay.

Que la inversa no es cierta —que no toda relación irreflexiva es asimétrica— está claro. Piénsese, sin ir más lejos, en la relación 'distinto de': irreflexiva, y, sin embargo, simétrica.

Digamos, por último, que *toda relación que sea irreflexiva, transitiva y conexa (y, por ende, asimétrica) recibe el nombre de 'serie'*. En realidad, y como sugiere Manuel Sacristán[313], quizá fuera mejor llamarle «relación seriadora», y decir de ella que convierte en una serie a los objetos de su campo. Así, por ejemplo, tomando como campo el de los números naturales podemos decir que la relación 'mayor que' hace de ellos una serie. Dicha relación es, en ese campo, irreflexiva (ningún número es mayor que sí mismo), transitiva (si un número es mayor que otro

[312] A las relaciones que son simétricas y transitivas —y, por tanto, también reflexivas— se les llama *'relaciones de equivalencia'*.

[313] *Introducción a la lógica y al análisis formal.* Barcelona, Editorial Ariel, 1964, 1970, pág. 262.

y éste es mayor que un tercero, el primero será asimismo mayor que este último), conexa (dados dos números cualesquiera, siempre ocurrirá que uno de ellos será mayor que el otro), y, por supuesto, asimétrica (si un número es mayor que otro, éste no será mayor, sino menor que aquél).

Hasta aquí no hemos hablado más que de relaciones *diádicas*. Hagamos siquiera una brevísima referencia a las relaciones entre más de dos términos, cuyo estudio —a pesar de su importancia para el razonamiento científico, e incluso para el ordinario— no puede decirse que esté altamente desarrollado.

Los predicados triádicos, tetrádicos, ...n-ádicos en general[314] pueden entenderse, según ya vimos, como enunciados abiertos con tres, cuatro, ...n argumentos.

Asimismo, y al igual que las relaciones diádicas se interpretaban como conjuntos de pares ordenados, las relaciones entre tres términos se interpretarán como conjuntos de tríos ordenados; y así sucesivamente.

Así, si R es una relación triádica podemos definirla como

$$\{x, y, z \mid Rxyz\}$$

En general, una relación $n$ádica R será

$$\{x_1 \ldots x_n \mid R(x_1 \ldots x_n)\}$$

Las relaciones entre relaciones n-ádicas (con n, ya lo hemos dicho, mayor que 2) pueden caracterizarse por analogía con las que hemos visto entre las relaciones de dos términos.

Así, si R es una relación tetrádica, tendremos

$$R =_{Df.} \{x, y, z, w \mid Rxyzw\}$$

Su complementaria, $-R$, será

$$\{x, y, z, w \mid \neg (Rxyzw)\}$$

Si R y S son dos relaciones tetrádicas, su producto absoluto, $R \cap S$, será

$$\{x, y, z, w \mid Rxyzw \wedge Sxyzw\}$$

Etcétera.

Para terminar, y como muestra de las complejidades en que nos introduce el tratamiento lógico de las relaciones entre más de dos términos,

[314] Con n mayor que 2, por supuesto.

consideraremos rápidamente el problema de las relaciones conversas de las relaciones poliádicas.

Sea n un número natural. Llamaremos $n!$ al producto de todos los números naturales entre 1 y n (incluyendo éste). Así, si $n = 5$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Pues bien: si una relación tiene n términos, tendrá $n! - 1$ relaciones conversas.

La fórmula empieza cumpliéndose ya en el caso de las relaciones diádicas. En estos casos, $n = 2$, y, por tanto, $n! = 1 \times 2 = 2$. Las relaciones diádicas tendrán —como en efecto tienen— $2 - 1$, es decir, una conversa.

Las relaciones triádicas tendrán cada una $1 \times 2 \times 3 = 6 - 1 = 5$ relaciones conversas. Etcétera.

D) **Identidad, cuantificadores numéricos y descripciones**

El predicado de identidad

A lo largo de las páginas precedentes hemos utilizado en varias ocasiones la noción de identidad. Hemos hablado de identidad de clases. También de identidad de relaciones. Incluso hemos examinado una especie de identidad entre enunciados, representada por el bicondicional.

No hemos hablado —aunque sí lo hemos usado intuitivamente en alguna ocasión— del tipo más común de identidad: la identidad entre individuos.

Tomemos los siguientes enunciados:

(1) Euclides fue el fundador de la Escuela de Megara.
(2) 12 es igual a 7 + 5.
(3) Francois Couperin fue el autor de la *Apoteosis de Lulli*.

Y comparémoslos con estos otros:

(4) Euclides fue discípulo de Sócrates.
(5) 12 es un número par.
(6) Francois Couperin fue un músico francés.

En los seis enunciados figura el verbo 'ser' en alguna de sus formas. Es evidente, sin embargo, que el sentido del verbo en (1), (2) y (3) es distinto que en (4), (5) y (6). En estos tres últimos casos el '*ser*' es, o el ser de la predicación (tal individuo *es* tal cosa: discípulo de Sócrates, número par, músico francés), o, visto de otro modo, el ser de la pertenencia (tal individuo pertenece a tal clase: a la de los músicos franceses, a la de los números pares, a la de los discípulos de Sócrates).

En cambio, el '*ser*' que aparece en los tres primeros enunciados es el ser de la identidad. Cuando decimos 'Euclides fue el fundador de la Escuela de Megara' estamos diciendo que Euclides fue idéntico al fundador de la Escuela de Megara, que Euclides y el fundador de la Escuela de Megara son *la misma* persona. Otro tanto ocurre cuando decimos, por ejemplo, 'Walter Burleigh es el autor de *De Puritate Artis Logicae*' o 'El que escribió *Sobre la cuádruple raíz del principio de razón suficiente* fue Schopenhauer' o —más elípticamente— 'El *Guernica* lo pintó Picasso'.

Como signo de la identidad viene usándose '='. Podríamos, pues, escribir (1), (2) y (3) así:

Euclides = el fundador de la Escuela de Megara.
12 = 7 + 5.
Francois Couperin = el autor de la *Apoteosis de Lulli*.

Así, pues, para decir que dos entidades cualesquiera son idénticas, escribiremos

$$x = y$$

Y para negar que lo son,

$$\neg (x = y)$$

o, más cómodamente,

$$x \neq y$$

Nótese que, si bien el signo de identidad se escribe entre nombres de individuo, lo que identificamos no son los nombres, sino las entidades nombradas por ellos. No estamos diciendo que la expresión 'Euclides' y la expresión 'el fundador de la Escuela de Megara' sean idénticas: es obvio que no lo son. Estamos diciendo que la persona a la que se refiere el nombre 'Euclides' y la persona a la que se refiere la descripción 'el fundado de la Escuela de Megara' son la misma.

Ahora bien: ¿acaso no es la identidad un predicado diádico como, por ejemplo, 'mayor que', 'casado con' (entre monógamos) y tantos otros? ¿Por qué concederle, entonces, tratamiento aparte? ¿Por qué es el de identidad un predicado distinguido dentro de la lógica?

Pues porque el predicado diádico '... es idéntico a ...' tiene una relevancia específica en la validez de cierto tipo de razonamientos. Hay, en efecto, inferencias que, siendo válidas, no lo son ni en virtud de las puras relaciones entre los enunciados que las componen, ni en virtud de lo anterior y del sentido de los cuantificadores, sino también, y específicamente, en virtud de la presencia en ellos del predicado de identidad.

Es, pues, su papel determinante en la validez de ciertos tipos de inferencias lo que justifica la atención especial que a la identidad se concede en lógica. Y a ello obedece el que se distinga entre *«lógica de predicados sin identidad»* y *«lógica de predicados con identidad»*. Ni que decir tiene que esta última abarca a la primera.

La lógica de la identidad, como suplemento de la lógica de predicados, tiene sus leyes. Y esas leyes no hacen sino desplegar el sentido del predicado '... es idéntico a ...'. He aquí algunas:

1. $\bigwedge x(x = x)$.

Ley de reflexividad de la identidad[315].

2. $\bigwedge x \bigwedge y[(x = y) \rightarrow (y = x)]$

Ley de simetría de la identidad[316]

3. $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z[(x = y) \wedge (y = z)] \rightarrow (x = z)$

Ley de transitividad de la identidad[317].

4. $\bigwedge x \bigwedge y[(x = y) \rightarrow (Px \leftrightarrow Py)]$

Ley de indiscernibilidad de los idénticos[318].

5. $\bigwedge x \bigwedge y[\bigwedge P(Px \leftrightarrow Py) \rightarrow (x = y)]$

Ley de identidad de los indiscernibles[319].

Obviamente, las leyes 4 y 5 podrían combinarse en una ley que tuviera la forma de un bicondicional. Que dos entidades son idénticas quiere decir que tienen las mismas propiedades.

Antes de pasar a la consideración de los cuantificadores numéricos, bueno será recopilar los distintos sentidos que la lógica ha ido encontrando en el verbo 'ser'.

1. El uso del verbo ser para indicar la *identidad*. Como acabamos de ver, este uso se traduce al simbolismo lógico escribiendo '=' entre símbolos de individuo.

[315] Es decir, ley que expresa que la relación de identidad tiene la propiedad de ser reflexiva. He aquí la formulación más obvia del llamado «Principio de identidad»: toda entidad es idéntica a sí misma.

[316] Es decir: ley que enuncia que la de identidad es una relación simétrica.

[317] Huelgan comentarios.

[318] La formulación de este principio se asocia normalmente con Leibniz. Sin embargo, se encuentra ya de algún modo en un texto de Aristóteles (*Tópicos*, H, 1, 152 a 33-37). Si dos entidades son idénticas, es que tienen las mismas propiedades.

[319] Principio enunciado también por Leibniz. Si dos entidades tienen todas sus propiedades en común, entonces son idénticas. Obsérvese que esta ley, al llevar cuantificada una letra predicativa, pertenece propiamente a la lógica de predicados de segundo orden.

2. El uso del verbo ser en el sentido de la *predicación*: es decir, el uso del verbo 'ser' para indicar que tal predicado conviene a tal individuo. En la escritura lógica, esta acepción del verbo 'ser' desaparece y queda subsumida en el predicado: 'Nicéforo Chumno era bizantino' se convierte en '*Ba*'.

3. El uso del verbo 'ser' para indicar la *inclusión* de una clase en otra o de una relación en otra. Su símbolo es '$\subset$'.

4. El uso del verbo 'ser' para significar la *pertenencia* de un individuo a una clase. Su símbolo es '$\in$'.

Cuantificadores numéricos

La noción de identidad —o la operación de identificación que mediante su aplicación efectuamos— permite ampliar el radio expresivo del lenguaje simbólico de la lógica.

Hasta el momento disponemos del cuantificador universal —que nos permite afirmar que *todos* los individuos de un determinado ámbito poseen tal propiedad o están en tal relación— y el cuantificador particular, mediante el cual podemos decir que, en un cierto universo del discurso, hay *al menos un* individuo tal que...

Ahora bien: ¿cómo decir que hay *al menos dos*, o *al menos tres*, o, en general, al menos *n* individuos que hacen verdadero un determinado enunciado abierto?

Y, por otra parte, ¿cómo decir que hay *a lo sumo uno*, *a lo sumo dos*, ..., *a lo sumo n individuos* de los que es verdadero un determinado predicado, monádico o poliádico?

En tercer lugar, ¿cómo expresar el hecho de hay *exactamente n* individuos de los que puede decirse tal y tal cosa?

Expresiones como

hay al menos *n* individuos tales que...
hay a lo sumo *n* individuos tales que
hay exactamente *n* individuos tales que

reciben el nombre de '*cuantificadores numéricos*', y sólo gracias al concurso de la noción de identidad pueden encontrar una formulación lógica adecuada. Veamos.

Empecemos con 'hay al menos *n* individuos tales que...'.

Ya sabemos cómo decir que hay *al menos un* individuo que, por ejemplo, posee la propiedad *P*:

(1) $\bigvee x Px$.

Hay *al menos dos* individuos que poseen la propiedad P se escribiría

(2) $\bigvee x \bigvee y\,[(Px \wedge Py) \wedge (x \neq y)]$

En efecto: lo que ahí dice es que hay algún [al menos un] x y algún [al menos un] y tal que x tiene la propiedad P e y tiene la propiedad P y x e y son distintos.

El enunciado 'Hay *al menos tres* individuos que poseen la propiedad P' quedaría, en símbolos, así:

(3) $\bigvee x \bigvee y \bigvee z\,[(Px \wedge Py \wedge Pz) \wedge (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)]$

'Hay *al menos cuatro* individuos que poseen la propiedad P' se diría

$\bigvee x \bigvee y \bigvee z \bigvee w\,[(Px \wedge Py \wedge Pz \wedge Pw) \wedge (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge$
$\wedge (x \neq w) \wedge (y \neq z) \wedge (y \neq w) \wedge (z \neq w)]$.

Etcétera.

La técnica de esquematización es, pues, bien sencilla. Prescidiendo del caso más simple —el de *al menos uno*—, todo consiste en afirmar que poseen la propiedad en cuestión tantos individuos cuantos interese, aclarando a continuación que se trata de individuos *distintos*.

Así, si se trata de decir, por ejemplo

Al menos siete individuos apuñalaron a César

ha de construirse la siguiente fórmula (en la que 'a' es 'Cayo Julio César'):

$\bigvee x_1 \bigvee x_2 \bigvee x_3 \bigvee x_4 \bigvee x_5 \bigvee x_6 \bigvee x_7\,[(Ax_1a \wedge Ax_2a \wedge Ax_3a \wedge$
$\wedge Ax_4a \wedge Ax_5a \wedge Ax_6a \wedge Ax_7a) \wedge (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge$
$\wedge x_1 \neq x_4 \wedge x_1 \neq x_5 \wedge x_1 \neq x_6 \wedge x_1 \neq x_7 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge$
$\wedge x_2 \neq x_4 \wedge x_2 \neq x_5 \wedge x_2 \neq x_6 \wedge x_2 \neq x_7 \wedge x_3 \neq x_4 \wedge$
$\wedge x_3 \neq x_5 \wedge x_3 \neq x_6 \wedge x_3 \neq x_7 \wedge x_4 \neq x_5 \wedge x_4 \neq x_6 \wedge$
$\wedge x_4 \neq x_7 \wedge x_5 \neq x_6 \wedge x_5 \neq x_7 \wedge x_6 \neq x_7)]$.

Pasemos al cuantificador numérico '*hay a lo sumo n individuos tales que* ...'. Si 'Hay al menos' supone un límite por abajo, 'Hay a lo sumo' supone un límite por arriba en el número de individuos que cierran un enunciado abierto haciéndolo verdadero.

'Hay *a lo sumo un* individuo que posee la propiedad P' se escribirá, en símbolos,

(1) $\bigwedge x \bigwedge y\,[(Px \wedge Py) \rightarrow (x = y)]$.

'Hay *a lo sumo dos* individuos que poseen la propiedad P' tendrá, en el lenguaje de la lógica, la siguiente forma

(2) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,\{(Px \wedge Py \wedge Pz) \rightarrow [(x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)]\}$.

'Hay *a lo sumo tres* individuos que poseen la propiedad P' se dirá así:

(3) $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \bigwedge w\,\{(Px \wedge Py \wedge Pz \wedge Pw) \rightarrow [(x = y) \vee (x = z) \vee$
$\vee (x = w) \vee (y = z) \vee (y = w) \vee (z = w)]\}$.

Así, pues, el modo de decir, en lógica, que hay a lo sumo n individuos que poseen una determinada propiedad consiste en decir que si hubiera $n + 1$ que la poseyeran, dos —al menos— de ellos serían idénticos.

Nótese que, así como en el caso de 'hay al menos' había que cuantificar tantas variables cuantos individuos entraran en juego, aquí hay que cuantificar una más. Si queremos decir que a lo sumo cuatro individuos poseen una determinada propiedad, hemos de hacerlo afirmando que, si fueran cinco, dos de ellos —como mínimo— serían el mismo.

Por ejemplo: el enunciado

Se tolerarán, a lo sumo, cinco partidos políticos

tomará, en símbolos, la siguiente forma:

$\bigwedge x_1 \bigwedge x_2 \bigwedge x_3 \bigwedge x_4 \bigwedge x_5 \bigwedge x_6\,(Tx_1 \wedge Tx_2 \wedge Tx_3 \wedge Tx_4 \wedge Tx_5 \wedge$
$\wedge Tx_6) \rightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee (x_1 = x_4) \vee (x_1 = x_5) \vee (x_1 = x_6) \vee$
$\vee (x_2 = x_3) \vee (x_2 = x_4) \vee (x_2 = x_5) \vee (x_2 = x_6) \vee (x_3 = x_4) \vee$
$\vee (x_3 = x_5) \vee (x_3 = x_6) \vee (x_4 = x_5) \vee (x_4 = x_6) \vee (x_5 = x_6)$.

Nos queda el tercer cuantificador numérico: 'Hay *exactamente n* individuos tales que ...'.

Ahora bien: decir que hay exactamente n individuos que poseen una cierta propiedad es como afirmar a un mismo tiempo que hay al menos n individuos que la poseen y a lo sumo n individuos que la poseen. Con otras palabras: 'exactamente n' significa 'al menos n y a lo sumo n'. En efecto:

'Hay *exactamente un* individuo que tiene la propiedad P' se escribiría así:

(1) $(\bigvee x\,Px) \wedge \bigwedge x \bigwedge y\,[(Px \wedge Py) \rightarrow (x = y)]$.

La primera parte de la fórmula dice que hay al menos un individuo que posee esa propiedad; la segunda, que no hay más de uno que la posea.

Así, por ejemplo, la frase de Kant

> Cada forma de juicio está determinada por exactamente un concepto *a priori*

tendría que ser esquematizada de este modo:

$$\wedge x\{Jx \rightarrow \vee y(Cy \wedge Dyx) \wedge \wedge z[Dzx \rightarrow (z = y)]\}$$ [320]

Y el enunciado (proferido por Rudolf Hess en 1934)

> Hay una persona que está más allá de toda crítica [el Führer]

presentaría, en lógica, este aspecto:

$$\{\vee x[\wedge y(Cy \rightarrow Mxy)] \wedge \wedge x \wedge y \wedge z[(Mzy) \rightarrow (z = x)]$$ [321]

El enunciado 'Hay *exactamente dos* individuos que poseen la propiedad *P*' tendrá la siguiente versión simbólica:

$$\vee x \vee y[(Px \wedge Py) \wedge (x \neq y)] \wedge \wedge x \wedge y \wedge z$$
$$[(Px \wedge Py \wedge Pz) \rightarrow (x = y) \vee (x = z) \vee (y = z)]$$

Por otra parte, cuando Juan Ruiz, Arcipreste de Hita, setencia

> Como diz' Aristótiles, cosa es verdadera:
> el mundo[322] por dos cosas trabaja: la primera
> por aver mantenençia; la otra cosa era
> por aver juntamiento con fenbra plazentera

lo que dice se reduce, desde un —triste— punto de vista lógico, a esto otro:

$$\wedge x\{(Ox \vee Ax) \rightarrow \vee y \vee z\{[(Txy \wedge Txz) \wedge (y \neq z)] \wedge \wedge y \wedge z \wedge w$$
$$(Txy \wedge Txz \wedge Txw) \rightarrow [(y = z) \vee (y = w) \vee (z = w)] \wedge (My \wedge Fz)\}\}$$ [323]

---

[320] Es decir: 'Para todo *x*, si *x* es una forma de juicio, entonces hay al menos un *y* tal que *y* es un concepto e *y* determina a *x*, *y*, para todo *z*, si *z* determina a *x*, entonces es que *z* es idéntico a *y*'.

[321] Es decir: 'Hay al menos un *x* tal que, para todo *y*, si *y* es una crítica, entonces *x* está más allá de todo *y*, y para todo *x*, para todo *y* y para todo *z*, si *z* está más allá de todo *y*, entonces es que *z* es idéntico a *x*'.

[322] Por 'mundo' hay que entender, según se lee en el título del poema, 'los omes é las otras animalias'.

[323] Es decir: 'para todo *x*, si *x* es un hombre o algún otro animal, entonces hay al menos un *y* y al menos un *z* tal que *x* trabaja por *y* y *x* trabaja por *z* e *y* no es idéntico a *z*, y para todo *y*, para todo *z* y para todo *w*, si *x* trabaja por *y* y *x* trabaja por *z* y *x* trabaja por *w*, entonces o *y* es idéntico a *z*, o *y* es idéntico a *w* o *z* es idéntico a *w*, e *y* es un alimento y *z* es una fenbra plazentera.

Señalemos dos cosas: en primer lugar, lo viril de la perspectiva que adopta el Arcipreste. En segundo lugar, la simplificación que hemos introducido en el final de la fórmula. Hemos, en efecto, convertido las relaciones de alimentación y de goce sexual en predicados monádicos.

Descripciones

Sean los siete enunciados siguientes:

(1) La viuda de Gustav Mahler tuvo amores con Oskar Kokoschka.
(2) El número que se obtiene restando 8 de 15 es impar.
(3) El autor de la sinfonía llamada «El Filósofo» nació en 1732.
(4) El que escribió, irónicamente, «¿Quién ha dicho que en España no hay libertad para escribir?» era español.
(5) El autor de *The Golden Bowl* era hermano de William James.
(6) La patria de Castelao cae el Noroeste de la Península Ibérica.
(7) El padrino de Bertrand Russell escribió un libro titulado *A System of Logic*.

Comparémoslos con estos otros siete:

(1') Alma Schindler tuvo amores con Oskar Kokoschka.
(2') El número 7 es impar.
(3') Joseph Haydn nació en 1732.
(4') Mariano José de Larra era español.
(5') Henry James era hermano de William James.
(6') Galicia cae al noroeste de la Península Ibérica.
(7') John Stuart Mill escribió un libro titulado *A System of Logic*.

Establezcamos una correspondencia —obligada, por lo demás— entre (1)-(7) y (1')-(7'). ¿Cuál es la diferencia —uno por uno, en correspondencia ordenada— entre el primer conjunto y el segundo? Tanto en los siete primeros enunciados como en los siete últimos se dice algo acerca de —en cada caso— un determinado individuo: que es impar, que nació en tal año, que escribió tal cosa, etc.

La diferencia está en el modo de referirse a esos individuos. La diferencia entre, por ejemplo, (1) y (1') no es otra que la que hay entre llamar a una persona 'La viuda de Gustav Mahler' y llamarle 'Alma Schnidler'; la diferencia entre (3) y (3') está en que en (3') nos referimos al sujeto del enunciado llamándole 'Joseph Haydn', mientras que en (3) aludimos a él hablando de 'El autor de la sinfonía llamada «El Filósofo»'.

Se trata, por tanto, de determinar la distinción entre expresiones como, por una parte, 'El número que se obtiene restando 8 de 15',

'La patria de Castelao', 'El padrino de Bertrand Russell', y, por otra, expresiones como '7', 'Galicia', 'John Stuart Mill'. Pues bien: lo que las distingue es que estas últimas son *nombres* de individuo. Se refieren a los individuos de una forma directa, llamándolos por sus nombres. En cambio, las expresiones del tipo 'El autor de *El mágico prodigioso*', 'La raíz cuadrada de 16' o 'El Presidente del P. S. O. E. en 1917' no se dirigen a los individuos nombrándolos, sino *describiéndolos*, singularizándolos mediante la determinación de una propiedad que *ellos y sólo ellos* poseen.

En lógica formal se llama 'descripción' a una expresión que se refiere a un individuo por medio de un rasgo que sólo a él conviene; que lo deja caracterizado como algo único.

No se trata, ni mucho menos, de un expediente insólito en el lenguaje ordinario: a veces, por conveniencia estilística —es decir, por evitar repeticiones «viciosas» de un nombre en un mismo contexto— llamamos a Londres 'la ciudad de la niebla'; a Pío Baroja, 'El autor de *La ciudad de la niebla*'; a San Sebastián, 'La ciudad donde nació el autor de *La ciudad de la niebla*'. O puede ser sencillamente que no nos interese dar el nombre del individuo en cuestión 'nuestro agente en Albania', o que lo ignoremos ('el autor de *Lazarillo de Tormes*').

Para llamar a las cosas por su nombre disponemos en lógica de las constantes individuales. Pero, ¿y para describirlas?

Para describirlas es preciso arbitrar recursos simbólicos nuevos. En efecto: si en un enunciado a esquematizar aparece el nombre 'Ferécrates' —que, desde el punto de vista lógico, es, por así decir, un objeto simple, inanalizable—, puedo muy bien representarlo por una constante individual. Pero si aquello con lo que me encuentro es una descripción como 'El autor de *Los salvajes*', ya no puedo recurrir a símbolos como '*a*', '*b*', etc. Si así lo hiciera, estaría ocultando, en el simbolismo, la presencia, en el lenguaje ordinario, de un predicado diádico como '... es autor de ...' y de un nombre de individuo, *Los salvajes*, nombre de una pieza teatral.

Veamos, pues, cómo representar en símbolos las descripciones.

Si tuviéramos que referirnos a —la clase de— los dramaturgos isabelinos, escribiríamos

$$\{x \mid Dx\}$$

(donde 'D' es el esquema de '... es un dramaturgo isabelino').

Pero como resulta que ahora hemos de referirnos a un individuo absolutamente único mentándolo de tal suerte que quede patente esa su unicidad, hemos de buscar otros procedimientos expresivos. Si queremos, por ejemplo, decir en símbolos 'el marido de Emma Bovary', habremos de hacerlo —siguiendo cierta tradición— así:

$$\iota x\,(Cxa)$$

Que se lee: el x tal que x está casado con a. El símbolo 'ι' (la iota de los griegos) se usa como símbolo de descripción o singularización. Y así como '$\wedge x$' se lee 'Para todo x', y '$\vee x$' se lee 'Hay al menos un x', así también 'ιx' significa 'el x tal que': el x tal que hace verdadero el enunciado abierto que sigue y que es el *único* en hacerlo verdadero.

Hemos empezado enumerando una serie de enunciados que contenían descripciones y hemos procedido luego a extraer esas descripciones y simbolizarlas aisladas. Cabría preguntar ahora cómo se esquematizarían, enteros, los enunciados que contienen descripciones. ¿Cómo vertiríamos en símbolos, por ejemplo, el enunciado 'El autor del presente libro hubiera querido vivir en la madrileña Calle de Aristóteles'? Así:

$Q\,[\iota x\,(Exa)]$ ['Vivir en la madrileña Calle de Aristóteles hubiera querido [Q] el x tal que x escribió [E] este libro [a]].

Si se trata del enunciado

El autor de *The Golden Bowl* era hermano de William James

tendríamos

$$H\,[\iota x\,(Exa)\,b]$$

Es decir: 'el x tal que x escribió a era hermano [H] de b'.

Y si sustituyéramos, en el enunciado anterior, el nombre 'William James' por la descripción 'el autor de *The Principles of Psychology*', habríamos de escribir

$$H\,[\iota x\,(Exa)\,\iota x\,(Exb)]$$

Que se leería: 'El x tal que x escribió a es hermano del x tal que x escribió b'.

Véase, pues, cómo la expresión de la descripción en símbolos ocupa el mismo lugar en la esquematización que los nombres de individuo. Por ejemplo: si quisiéramos expresar en lenguaje lógico el enunciado

el 7 es impar

diríamos

Ia ['El ser impar se da en a'].

Si, en cambio, sustituimos '7', nombre del número 7, por la descripción 'el número que resulta de restar 8 de 15' y decimos

el número que resulta de restar 8 de 15 es impar

tendríamos que optar por esta otra esquematización

$$I\,[\iota x\,(x = 15 - 8)]$$ [324]

donde la descripción ocupa el mismo lugar que antes ocupaba la constante individual.

Veamos algunos ejemplos más complicados. Sea, por ejemplo, el enunciado

El Papa Sergio III hizo estrangular a sus dos predecesores

Su representación en símbolos tendría esta forma:

$$\{E\,[\iota x\,(Pxa)\,a]\} \wedge E\,\{\iota y\,[Py\,\iota x\,(Pxa)]\,a\}$$

Es decir: Sergio III [a] hizo estrangular [E] al x tal que x era predecesor suyo, y asimismo hizo estrangular al y tal que y era predecesor del x tal que x era predecesor de a.

La frase

Edipo mató a su padre y se casó con su madre

tendría esta versión simbólica

$$M\,[(\iota x\,Pxa)\,a] \wedge C\,[(\iota x\,Mxa)\,a]$$

Es decir: a mató al x tal que x era padre de a y se casó con el x tal que x era madre de a.

Así, pues, el símbolo 'ι' es el símbolo de la unicidad. Sirve, adosado a una variable, para componer una referencia a un solo individuo, a un individuo que se distingue de todos los demás por una característica que se indica a continuación. Y cuando una designación de individuo encabezada por 'ι' cierra un enunciado abierto, lo cierra diciendo que no hay más que un individuo —precisamente ése— que lo hace verdadero. Cabría, por tanto, afirmar que una expresión como

El autor de *Las firmezas de Isabela* era cordobés

[324] Para mayor facilidad, hemos expresado 'x es el resultado de restar 8 de 15' en la terminología aritmética habitual.

equivale a esta otra:

Hay exactamente una persona que escribió *Las firmezas de Isabela* y esa persona nació en Córdoba.

El primero de estos dos enunciados lo simbolizaríamos así:

$C\,[\iota x\,(Exa)]$ ['El x tal que x escribió *Las firmezas de Isabela* era cordobés'].

¿Y el segundo? El segundo es una conjunción de enunciados. Consideremos por separado el primero de ellos: 'hay exactamente una persona que escribió *Las firmezas de Isabela*'. Ya sabemos cómo representar 'hay *exactamente un* individuo tal que ...'. En este caso lo haríamos así:

$$\bigvee x\,\{Exa \wedge \bigwedge y\,[Eya \rightarrow (y = x)]\}$$

Y el segundo enunciado —'era cordobés'— se añade sencillamente en conjunción, quedando todo de la siguiente forma:

$$\bigvee x\,\{Exa \wedge \bigwedge y\,[Eya \rightarrow (y = x)] \wedge Cx\}$$

El símbolo 'ι' es, por tanto, una abreviatura.

En resumen: para que un enunciado que contenga una descripción sea verdadero se requieren dos condiciones:

1.ª Que exista un individuo, y uno sólo, que responda a la descripción.

2.ª Que el individuo en cuestión tenga la propiedad o mantega la relación que el enunciado expresa.

Por ejemplo, el enunciado

La esposa de Lewis Carroll era cuáquera

es falso. Porque no existe ningún individuo a quien esa descripción pueda aplicarse. Esa descripción carece de referencia. Es una descripción *impropia*.

El enunciado

El asesino de Juan Escoto Erígena estudiaba en la abadía de Malmesbury

es falso. Porque hay más de una persona a la que corresponde esa descripción. A Escoto Erígena lo mataron sus alumnos: quizá no todos, pero sí más de uno[325]. Por la misma razón serían falsos enunciados

[325] Según otra versión, J. E. Erígena no murió asesinado. En ese caso, el enunciado sería asimismo falso, pero por otro motivo: porque no habría individuo alguno que cumpliera la descripción.

como 'El que preparó el asesinato de Kirov era ucraniano', ya que —al menos según el insigne jurista Vychinski— buena parte de los ciudadanos de la URSS participaron en dicha preparación.

Por último, un enunciado como

El autor de *Un vagabundo de las islas* nació en Inglaterra

sería también falso. Porque, si bien hay una, y una sola persona —llamada 'Joseph Conrad'— que cumple la descripción, no es cierto que esa persona naciera en Inglaterra.

Lo que hasta aquí hemos hecho no es sino esbozar la llamada «teoría de las descripciones *definidas*». Hay, en efecto, descripciones *indefinidas* —como, por ejemplo, la contenida en el enunciado '*Un* hombre de gabán negro cruzó la espesura' o en '*Un* retrasado mental partidario del ocultismo vio cómo se posaben sobre su mesa camilla setenta y siete platillos volantes', o en '*Una* alimaña de piel viscosa penetró en los aposentos del conde'. Un enunciado en el que figure una descripción indefinida es verdadero si: 1.° Hay al menos un individuo que cumple la descripción (repárese en que aquí ya no se exige, como en el caso de las descripciones definidas, que sea un *único* individuo). 2.° El individuo —o individuos— en cuestión tiene la propiedad o mantiene la relación designada por el predicado.

A la rutinaria pregunta de por qué en lógica formal se concede tratamiento específico a las expresiones descriptivas hay que dar la respuesta de costumbre: porque hay razonamientos cuya validez depende de la presencia en ellos de una o más descripciones. En el siguiente apartado lo veremos.

2. La lógica de predicados como sistema de reglas de inferencia

Razón de una omisión

¿No omitimos algo? Hacemos la pregunta porque nuestro tratamiento, en el capítulo I, de la lógica de enunciados, se articulaba en tres partes fundamentales: una iniciación, por vía intuitiva, a sus nociones básicas; una presentación axiomática; y una presentación como sistema de reglas de inferencia. Paralelamente, aquí, en lógica de predicados, hemos empezado con una demorada caracterización de sus nociones fundamentales. Cabría esperar que tras ello pasáramos a la presentación de la lógica de predicados de primer orden como sistema axiomático.

Hemos optado, sin embargo, por suprimirla. En efecto: la pretensión de este libro no es otra —reiterémoslo— que la de hacer atractiva la lógica al profano sin por ello profanarla; la de airear la lógica mostrando sus aplicaciones posibles, tanto irónicas como circunspectas; la de incitar, en suma, a no ver en la lógica ni un enemigo de la libertad de pensar, ni un saber esotérico, ni una fuente de hastío. Por razones que tenemos la esperanza de haber expuesto con la suficiente claridad, nada hay mejor para ello que presentar la lógica como cálculo de la deducción natural, como elaboración teórica de nuestras posibilidades de argumentar, de asentar la verdad de ciertos enunciados en la verdad de otros asertos que admitimos como premisas.

La presentación de la lógica en la forma de sistema axiomático tiene, como hemos visto, sus ventajas: muestra muy bien el orden interno que gobierna la lógica y convierte a ésta en un sejeto especialmente bien configurado para la reflexión metateórica. Sin embargo, a nosotros nos interesa ver en la lógica un instrumento de análisis, más que un conjunto de verdades formales; una actividad sistemática de exhumación de la estructura profunda de nuestros razonamientos, mejor que un depósito de esqueletos de inferencias; una formulación esclarecida de las reglas de nuestra práctica raciocinante, antes que un conjunto de paradigmas estáticos de argumentación.

Con nuestra presentación axiomática de la lógica de enunciados cumplíamos, pues, sobre todo un propósito ilustrativo: el de informar de la posibilidad de presentar la lógica formal de esa forma. Y puesto que esa posibilidad ya está mostrada, y no es difícil imaginar un sistema axiomático ampliado hasta abarcar toda la lógica de predicados de primer orden, hemos decidido evitar al lector el trance de estudiarlo con algún detalles[326]. Que se sepa que podríamos haberlo hecho, y con eso pasaremos a dar de la lógica la versión que más no interesa, porque nos la hace más próxima, más claramente presente en cualquiera de nuestras reflexiones.

Se trata, pues, de presentar la lógica de predicados de primer orden como sistema de reglas de inferencia.

El sistema de reglas de inferencia para la lógica de enunciados contenía ocho reglas básicas: dos —una de introducción, y otra de eliminación— por cada uno de los cuatro signos lógicos fundamentales de ese cálculo —negación, conjunción, disyunción y condicional.

Ahora bien: ya hemos dicho —y hemos ido viendo— que la lógica de predicados abarca —superándola— la de enunciados. Esta última es, por tanto, como un subsistema de fondo de aquélla, y todas las reglas que utilizábamos en lógica de proposiciones seguirán siendo aplicables en lógica cuantificacional. Pero si, por una parte, las derivaciones que efectuamos en el cálculo de predicados suponen el uso de las reglas del

[326] El lector podrá encontrar, en los libros ya citados de Manuel Sacrastán (págs. 103 y ss.) y Manuel Garrido (págs. 280 y ss.) presentaciones axiomáticas del cálculo de predicados de primer orden.

de enunciados, exigen también, por otra parte, el concurso de nuevas reglas, específicas de este apartado de la lógica en el que estamos.

Antes, pues, de presentar el sistema global de reglas para toda la lógica de primer orden, nos detendremos en la enumeración y glosa de las reglas peculiares de la lógica de predicados.

Presentación de las nuevas reglas

Las reglas del cálculo de enunciados giraban en torno a los signos *propiamente lógicos* de ese cálculo. Otro tanto ocurrirá con las del de predicados. ¿Cuáles son los signos propiamente lógicos —las constantes lógicas— de ese cálculo? El cuantificador universal, el cuantificador particular, el signo de identidad y el símbolo de las descripciones definidas. Tendrá, entonces, que haber reglas para operar con cada uno de ellos.

Empecemos por los cuantificadores. Al igual que con las conectivas, con ellos pueden llevarse a cabo dos operaciones fundamentales: introducirlos, y eliminarlos. Tendremos, en consecuencia, cuatro reglas para empezar:

1.ª *Regla de eliminación del cuantificador universal* (RE ⋀).

Vamos a empezar con la formulación más sencilla, válida para la lógica de predicados monádicos. Luego la extenderemos a la lógica general de predicados.

En su versión más simple, la Regla de Eliminación del Cuantificador Universal tendría esta forma:

$$\frac{\bigwedge x\, \varphi x}{\varphi \alpha}$$ [327]

Nada tiene de extraño esta regla: lo que es verdadero de todos los x es verdadero de uno cualquiera de ellos. El ejemplo más sencillo de aplicación de esta regla sería el paso de

$$\bigwedge x\, Px$$

a

$$Pa$$

Igualmente, la RE ⋀ nos permite pasar de, por ejemplo,

$$\bigwedge x\, (Px \rightarrow Qx)$$

[327] Donde 'φ' es una variable metalingüística que representa cualquier predicado —monádico, en este caso—, y 'α' es, como ya hemos advertido, un parámetro, algo así como el símbolo de un ejemplo cualquiera de nombre de individuo.

a

$$Pa \rightarrow Qa$$

O de

$$\bigwedge x\, [(Px \wedge \neg Qx) \leftrightarrow Rx]$$

a

$$(Pa \wedge \neg Qa) \leftrightarrow Ra$$

Nótese que, al menos cuando el universo del discurso es finito, la Regla de Eliminación del Cuantificador Universal puede justificarse por la Regla de Eliminación de la Conjunción. En efecto: si suponemos un universo de cuatro individuos, resultará que

$$\bigwedge x\, Px \leftrightarrow (Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge Pd)$$

Y el paso de

$$Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge Pd$$

a, por ejemplo,

$$Pa$$

quedará justificado del mismo modo que lo estaba el de

$$p \wedge q \wedge r \wedge s$$

a

$$p$$

Puesto que nuestro sistema de reglas de inferencia aspira a cubrir toda la lógica de predicados, así monádica como poliádica, habrá que proceder a una formulación más general de esta regla. En general, tendremos:

RE ⋀

$$\frac{\bigwedge x_1, ..., x_n\, (\varphi x_1, ..., x_n)}{\varphi \alpha_1, ..., \alpha_n}$$

La regla, así formulada, permite, entonces, pasar, por ejemplo, de

$$\bigwedge x \bigwedge y\,(Pxy)$$

a

$$Pab$$

En efecto: lo que hemos hecho no es más que eliminar simultáneamente los dos cuantificadores y sustituir, en 'Pxy', x por a e y por b.

Asimismo, esta regla haría válido el siguiente paso deductivo:

$n.$	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,[(Pxy \wedge Qzx) \rightarrow Ryxz$	
$n+1.$	$(Pab \wedge Qca) \rightarrow Rbac$	RE $\bigwedge$, n

2.ª *Regla de Introducción del Cuantificador Universal* (RI $\bigwedge$).

Así como la regla anterior encaja perfectamente con nuestras intuiciones, e incluso a veces su aplicación resultaría, en la argumentación ordinaria, absolutamente trivial, esta otra requiere algún comentario. En efecto, su formulación, para lógica de predicados monádicos, sería ésta:

$$\frac{\varphi\alpha}{\bigwedge x\,\varphi x}$$

Y, ¿cómo es posible que en lógica se acepte como válido el paso de una afirmación acerca de un individuo a una afirmación relativa a todos los individuos de un cierto conjunto?

La asombrosa perspectiva lógico-formal de Aristóteles se pone una vez más de manifiesto ante quien lee un pasaje de los *Tópicos* en el que se dice lo siguiente: «Porque no basta, para probar que la cosa se da en todos los casos, argumentar en torno a un caso aislado; para probar que toda alma es inmortal no basta con probar que el alma humana es inmortal. De modo que hay que convenir en que si un alma cualquiera (*ἡτισοῦν ψυχή*) es inmortal, entonces toda alma es inmortal. Por lo demás, este método no debe emplearse siempre, sino sólo cuando no podemos dar una explicación común a todos los casos, como hace el geómetra cuando afirma que los ángulos de un triángulo son iguales a dos rectos»[328].

En efecto: ¿cómo demuestra un geómetra que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a dos rectos? ¿Cómo demuestra un geómetra que el cuadrado e la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos? ¿Inspeccionando todos y cada uno de los triángulos (o de los triángulos rectángulos)? Es obvio

[328] *Tóp.*, B, 3, 110a38-110b7.

que no. Lo que hace el geómetra es tomar un triángulo *cualquiera* —dibujándolo en una pizarra, por ejemplo, o trazándolo sobre una hoja de papel— y demostrar que los tres ángulos de ese triángulo miden en total ciento ochenta grados. Pero he aquí que lo demostrado para *ese* triángulo vale para *todo* triángulo. ¿Por qué? Porque, como diría ya Aristóteles, ese triángulo es un triángulo *cualquiera*, que en nada esencial se diferencia de los demás. Y lo que vale para un triángulo cualquiera vale para cualquier triángulo. Dicho de otro modo: si el hecho de que el cuadrado de la hipotenusa de un cierto triángulo rectángulo sea igual a la suma de los cuadrados de sus catetos no se debe a ninguna característica privativa de ese triángulo, sino a rasgos que ese triángulo rectángulo posee en común con cualquier otro, entonces eso que decimos de él podemos decirlo de todos los triángulos rectángulos pasados, presentes y futuros.

Bien pensado, tampoco resulta tan insólito este modo de proceder deductivamente. En la argumentación ordinaria pueden encontrarse abundantes ejemplos: cuando un individuo orgánicamente normal ingiere cierta sustancia y ello produce en él cierta reacción, es lógico pensar que esa misma reacción se producirá en todos aquellos que ingieran tal sustancia (siempre y cuando, repitamos, el individuo de referencia sea en verdad un individuo *cualquiera*, y no, por ejemplo, un individuo que padezca determinadas lesiones); etc.

Supongamos, por ejemplo, que se nos pide que demostramos la validez de una inferencia que tenga esta forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)\\ \bigwedge x\,(Qx \rightarrow Rx)\end{array}}{\bigwedge x\,(Px \rightarrow Rx)}$$

Procederíamos, entonces, del siguiente modo:

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Qx \rightarrow Rx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Qa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
5.	$Pa \rightarrow Ra$	RTr $\rightarrow$, 3, 4

Hasta aquí todo está claro: los pasos 1 y 2 consisten sencillamente en la introducción de las premisas. En 3 y 4 eliminamos de éstas los cuantificadores —pues sólo así podremos aplicar las reglas de inferencia del cálculo de enunciados. En 5 aplicamos la Regla de Transitividad del Condicional (que aquí, en vez de aplicarse a enunciados sin analizar esquematizados por 'p', 'q', etc., afecta a enunciados analizados). En efecto: las líneas 3 y 4 nos permiten afirmar, en 5, que si el individuo a posee

la propiedad P, entonces posee la propiedad R. Ahora bien: ¿acaso no es el individuo a un individuo cualquiera? ¿Qué tiene él que no tengan los demás x? Podemos, pues, concluir

6. $\wedge x(Px \rightarrow Rx)$ RI $\wedge$, 5

Generalizándola a toda la lógica de predicados, la Regla de Introducción del Cuantificador Universal se formularía así:

$$\frac{\text{RI} \wedge \qquad \varphi\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\wedge x_1, \ldots, x_n(\varphi x_1, \ldots, x_n)}$$

Imaginemos, por ejemplo, que se trata de demostrar la validez del siguiente esquema:

$$\wedge x \wedge y(Pxy) \leftrightarrow \wedge y \wedge x(Pxy)$$

He aquí la derivación:

1.	$\wedge x \wedge y\, Pxy$	
2.	$\wedge y\, Pay$	RE $\wedge$, 1
3.	Pab	RE $\wedge$, 2
4.	$\wedge x\, Pxb$	RI $\wedge$, 3
5.	$\wedge y \wedge x\, Pxy$	RI $\wedge$, 4
6.	$\wedge x \wedge y\, Pxy \rightarrow \wedge y \wedge x\, Pxy$	RI $\rightarrow$, 1-5
7.	$\wedge y \wedge x\, Pxy$	
8.	$\wedge x\, Pxb$	RE $\wedge$, 7
9.	Pab	RE $\wedge$, 8
10.	$\wedge y\, Pay$	RI $\wedge$, 9
11.	$\wedge x \wedge y\, Pxy$	RI $\wedge$, 10
12.	$\wedge y \wedge x\, Pxy \rightarrow \wedge x \wedge y\, Pxy$	RI $\rightarrow$, 7-11
13.	$\wedge x \wedge y\, Pxy \leftrightarrow \wedge y \wedge x\, Pxy$	RI $\leftrightarrow$, 6, 12

Hemos venido diciendo que el requisito para poder aplicar la RI es que el individuo de referencia sea, desde el punto de vista lógico, un cualquiera. Esto pudiera parecer intuitivamente claro, pero se hace necesario presentarlo en una versión más precisa. ¿Cómo traducir al cálculo esa exigencia de que el a que nos permite —en el caso más simple— pasar de 'Pa' a '$\wedge x\, Px$' sea uno más entre los x?

Formulando la regla con la siguiente restricción:

$$\frac{\text{RI} \wedge \qquad \varphi\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\wedge x_1, \ldots, x_n(\varphi x_1, \ldots, x_n)}$$

Siempre y cuando $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, no aparezcan en inguna premisa auxiliar no eliminada de la que dependan, respectivamente, $\varphi\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Así, volviendo al caso más sencillo, el paso

$$\frac{Pa}{\wedge x\, Px}$$

está sujeto a la restricción de que a no haya aparecido en ninguna premisa auxiliar no eliminada de la que dependa Pa. Al decir que una determinada fórmula depende de una premisa auxiliar queremos decir, naturalmente, que esa fórmula no se puede afirmar más que en el curso de la subderivación inaugurada por esa premisa auxiliar.

Para podemos presentar ejemplos de aplicaciones correctas e incorrecta de esta regla, es preferible esperar a conocer las dos que restan, y en especial la siguiente.

3.ª *Regla de Eliminación del Cuantificador Particular* (RE $\vee$).

Esta es otra regla que también exige comentario.

Limitémonos durante un instante a la lógica de predicados monádicos. Por un principio de simetría podríamos, habida cuenta de que la RE $\wedge$ tiene la forma

$$\frac{\wedge x\, \varphi x}{\varphi\alpha}$$

pensar que la Regla de Eliminación del Cuantificador Particular no es otra que ésta:

$$\frac{\vee x\, \varphi x}{\varphi\alpha}$$

Y no. Así formulada, ésa no sería una regla correcta de inferencia. En efecto: nada más fácil que inferir un enunciado falso a partir de un enunciado verdadero mediante esa regla. Ella nos permitiría pasar, por ejemplo, del enunciado 'Algún egipcio del Imperio Nuevo escribió el *Libro de la Sala Oculta*' (que es verdadero) al enunciado 'Nefertiti escribió el *Libro de la Sala Oculta*' (cosa que no parece que sea cierta); o daría

como válida la inferencia 'Había algún ateniense que admiraba a Sócrates, luego Licón admiraba a Sócrates'. Evidentemente, es imposible justificar desde un punto de vista lógico el paso de una premisa como

Hay algún x tal que x es P

a una conclusión como

a es P

Ahora bien: tanto en la argumentación natural como en el razonamiento científico se aplica un patrón de inferencia que de algún modo cabría calificar de «Regla de Eliminación del Cuantificador Particular». El proceso de aplicación de esa regla empezaría con el paso de una línea de la demostración en la que se leyera

Hay algún x tal que x es P

a otra que rezara

Sea a ese individuo que es P

Y es evidente que esta última afirmación equivale a esta otra:

Supongamos que a es ese individuo que es P

Tenemos, pues, iniciada la formulación de la regla:

$\vee x\, \varphi x$
┌─ $\varphi\alpha$
│

¿Y después? Después habrá que emprender esa subderivación que se abre con '$\varphi\alpha$', y, si al cabo de ella llegamos a una fórmula —digamos 'X'—, podremos cerrar la subderivación y afirmar X. Por lo tanto, la Regla de Eliminación del Cuantificador Particular tendría, para predicados monádicos, esta forma:

$\vee x\, \varphi x$
┌─ $\varphi\alpha$
│
│ X
└────
X

Así pues, aplicar la RE $\vee$ no consiste en pasar de la afirmación de que hay alguien que hace verdadero un enunciado abierto a la aserción de que ese alguien es tal individuo concreto. Consiste en decir: hay algún x tal que φx; pues bien: supongamos que ese x es α y veamos qué se sigue de ello.

Ahora bien: ¿qué requisitos habrá de cumplir ese α? Veíamos cómo en el caso de la RI $\wedge$ el requisito del parámetro sobre el que se efectuaba la generalización era que representara a un individuo *cualquiera.* Ahora, en cambio, el requisito que pesaba sobre α es en cierto sentido el inverso: al decir 'sea α ese x tal que φx' estamos haciendo de α un caso especial, estamos distinguiéndolo, señalándolo. ¿Cómo se traduce formalmente esta exigencia? Restringiendo la aplicación de la regla a aquellos casos en los que α no aparece ni en $\vee x\, \varphi x$, ni en X, ni en ninguna premisa auxiliar anterior que no haya sido eliminada. En efecto: la aplicación de la regla sólo será correcta si ese individuo α es verdaderamente un caso especial, un individuo especialmente elegido para el caso (y eso no ocurriría si el tal individuo hubiera aparecido ya en otra premisa auxiliar); por otra parte, y por la misma razón, se hace necesario que α no figure en la fórmula obtenida, X, pues de lo contrario no podríamos afirmar esa fórmula fuera de la subderivación que se ha iniciado con la introducción de $\varphi\alpha$.

Precisamente el hecho de que las exigencias con respecto al parámetro sean tan distintas en RI $\wedge$ y en RE $\vee$ hace que no sea en absoluto correcto generalizar (aplicar RI $\wedge$) sobre un parámetro obtenido al eliminar el cuantificador particular (al aplicar RE $\vee$). Así, sería *del todo inaceptable* una derivación como ésta:

1.	$\vee x\, Px$	P
┌ 2.	Pa	
└ 3.	$\wedge x\, Px$	RI $\wedge$, 2
4.	$\wedge x\, Px$	RE $\vee$, 1, 2-3

La formulación general de la RE $\vee$ sería:

RE $\vee$

$\vee x_1, ..., x_n\, (\varphi x_1, ..., x_n)$
┌─ $\varphi\alpha_1, ..., \alpha_n$
│
│ X
└────
X

Siempre y cuando $\alpha_1, ..., \alpha_n$ no aparezcan ni en $\vee x_1, ..., x_n$ $(\varphi x_1, ..., \varphi x_n)$ ni en X, ni en ninguna premisa auxiliar no eliminada.

No es imposible, ni siquiera difícil, encontrar en el razonamiento natural casos de aplicación de esta regla. El siguiente podría ser un

ejemplo: 'Alguien robó el cuadro de Vermeer. Supongamos que ha sido Rev. Ahora bien: todas las joyas y objetos de arte que Rev roba se los vende a Rin. Y todos sabemos que Rin abastece de cuadros robados a Tirps, el famoso coleccionista. Creo que debiéramos hacer una visita a Tirps!'

4.ª *Regla de Introducción del Cuantificador Particular* (RI $\vee$).

Quizá sea ésta la regla más sencilla de todas. En su formulación para lógica de predicados monádicos tendría esta forma:

$$\frac{\varphi\alpha}{\vee x\, \varphi x}$$

Lo que es verdadero de uno es verdadero de alguien. Dicho de otro modo: si φ —y φ es, como sabemos, una expresión predicativa cualquiera— puede decirse de α, entonces hay al menos un x tal que φx.

Si queremos que valga para la lógica general de predicados hemos de formular esta regla así:

RI $\vee$

$$\frac{\varphi\alpha_1, ..., \alpha_n}{\vee x_1, ..., x_n (\varphi x_1, ..., x_n)}$$

Al igual que la RE $\wedge$ se relacionaba con la Regla de Eliminación de la Conjunción, esta Regla de Introducción del Cuantificador Particular guarda un parentesco claro con la de Introducción de la Disyunción. En efecto: si, con un universo del discurso finito, el cuantificador particular equivale a una disyunción de enunciados singulares, el paso de, por ejemplo, '*Pa*' a '$\vee x\, Px$' se justifica por el hecho de que —si el universo tuviera, por ejemplo, tres miembros— decir '$\vee x\, Px$' sería como decir

$$Pa \vee Pb \vee Pc$$

Y es evidente que si *Pa* es verdadero, también lo será cualquier disyunción que tenga a *Pa* entre sus miembros.

Así, pues, el paso

$$\frac{Pa}{Pa \vee Pb \vee Pc}$$

en nada relevante se diferencia del paso

$$\frac{p}{p \vee q \vee r}$$

que ya hemos explicado en lógica de enunciados.

Veamos un ejemplo muy sencillo que nos servirá para ilustrar las dos reglas relativas al cuantificador particular, y en especial la primera.

Tratemos de demostrar la validez del siguiente esquema de razonamiento[329]:

$$\frac{\begin{array}{c}\wedge x\, (Px \to Qx)\\ \vee x\, (Rx \wedge Px)\end{array}}{\vee x\, (Rx \wedge Qx)}$$

Derivación:

1.	$\wedge x\, (Px \to Qx)$	P
2.	$\vee x\, (Rx \wedge Px)$	P
3.	$Pa \to Qa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \wedge Pa$	
5.	Ra	RE $\wedge$, 4
6.	Pa	RE $\wedge$, 4
7.	Qa	RE $\to$, 3, 6
8.	$Ra \wedge Qa$	RI $\wedge$, 7, 5
9.	$\vee x\, (Rx \wedge Qx)$	RI $\vee$, 8
10.	$\vee x\, (Rx \wedge Qx)$	RE $\vee$, 2, 4-9

En 3 hemos eliminado, sin más problemas, el cuantificador universal que aparece en 1. En 4 eliminamos el cuantificador particular que aparece en 2, pero, al hacerlo, hemos de abrir una subderivación, la cual, mediante aplicación de reglas ya conocidas de la lógica de enunciados y, en el paso de 8 a 9, de la Regla de Introducción del Cuantificador Particular, nos lleva al resultado buscado, que a renglón seguido podemos ya afirmar fuera de la subderivación. Obsérvese que no se ha transgredido ninguna de las restricciones impuestas a la aplicación de la RE $\vee$: *a* no aparece ni en 2, ni en 9, ni en ninguna premisa auxiliar no eliminada.

Dos reglas definen el sentido del signo de identidad[330]:

5.ª *Regla de Introducción de la Identidad* (RI =).

Tendrá esta forma:

RI =

$$\frac{\varphi i}{\wedge x\, [(x = i) \to \varphi x]}$$

[329] Que corresponde al modo silogístico *Darii*, de la primera figura.

[330] Cfr. D. Kalish y R. Montague, *Logic. Techniques of Formal Reasoning*. Nueva York, Harcourt, Brace and World, 1964, cap. VI, 3. En castellano, J. Mosterín, *Lógica de primer orden*. Barcelona, Editorial Ariel, 1970.

Quiere decirse: si un predicado es verdadero de cierto individuo, será verdadero también de todo individuo idéntico a él[331].

Veamos un caso sencillo de aplicación de esta regla. Sea la inferencia siguiente:

> La cabeza visible del Círculo de Viena murió asesinado
> Moritz Schlick era la cabeza visible del Círculo de Viena
> ---
> Moritz Schlick murió asesinado

Sea C 'ser cabeza visible del Círculo de Viena'; A, 'morir asesinado'; y a, 'Moritz Schlick'.

Derivación:

1.	$A(\iota x\, Cx)$	P
2.	$a = \iota x\, Cx$	P
3.	$\bigwedge y\,[(y = \iota x\, Cx) \rightarrow Ay]$	RI =, 1
4.	$(a = \iota x\, Cx) \rightarrow Aa$	RE $\wedge$, 3
5.	Aa	RE $\rightarrow$, 2, 4

Otra sencilla inferencia cuya validez depende de esta Regla de Introducción de la Identidad sería

> El autor de *Syntactic Structures* simpatiza con el anarquismo
> Richard Nixon no simpatiza con el anarquismo
> ---
> Richard Nixon no es el autor de *Syntactic Structures*

Sea A, 'ser autor de *S.S.*'; S, 'simpatizar con el anarquismo'; y a, 'Richard Nixon'.

Derivación:

1.	$S(\iota x\, Ax)$	P
2.	$\neg Sa$	P
3.	$\bigwedge y\,[(y = \iota x\, Ax) \rightarrow Sy]$	RI =, 1
4.	$(a = \iota x\, Ax) \rightarrow Sa$	RE $\wedge$, 3
5.	$a \neq \iota x\, Ax$	MT, 2, 4

6.ª *Regla de Eliminación de la Identidad* (RE =).

Es una inversión de la regla anterior:

RE =

$$\frac{\bigwedge x\,[(x = i) \rightarrow \varphi x]}{\varphi i}$$

[331] Nótese que en la formulación de esta regla no usamos α, como en la de las anteriores, sino un símbolo, i, que constituye una designación de individuo (sea por medio de una constante, sea —y esta es la razón del cambio de símbolo— por una descripción).

Es decir: si todos los individuos idénticos a un individuo dado tienen cierta propiedad, también la tendrá ese mismo individuo.

Mediante esta regla podríamos dar sin más como válida la siguiente inferencia:

> Todas las composiciones musicales que tienen la misma estructura que el Concierto para clarinete de La mayor, KV622, de Mozart, constan de Allegro, Adagio y Rondo (Allegro).
> ---
> El Concierto para clarinete en La mayor KV622, de Mozart, consta de Allegro, Adagio y Rondo (Allegro).

Sea, en efecto, a el citado concierto, y C, 'constar de Allegro, Adagio y Rondo (Allegro)'.

Derivación:

1.	$\bigwedge x\,[(x = a) \rightarrow Cx]$	P
2.	Ca	RE =, 1

7.ª *Regla de Introducción de Descripciones Propias* (RDP)[332].

RDP

$$\frac{\bigvee y \bigwedge x\,[\varphi x \leftrightarrow (x = y)]}{\varphi(\iota x \varphi x)}$$

Si hay un individuo del que cabe decir que es el único que posee una determinada propiedad (y eso es lo que dice la premisa de la regla: que hay exactamente un x tal que φx), entonces se puede introducir la descripción de ese individuo —que será, por tanto, una descripción propia— y asignarle a tal individuo esa propiedad. Por ejemplo: sea el enunciado

Hay un individuo que escribió *El estruendo de las rosas*[333]

Si, para simplificar, representamos 'haber escrito *El estruendo de las rosas*' por P, el esquema de ese enunciado sería el siguiente:

$$\bigvee y \bigwedge x\,[Px \leftrightarrow (x = y)]$$

Pues bien: la regla que estamos considerando nos permite pasar de eso a

$$P(\iota x\, Px)$$

[332] Cfr. Kalish-Montague, *op. cit.*, cap. VII, 5.

[333] Manuel Peyrou.

Es decir: 'El autor de *El estruendo de las rosas* escribió *El estruendo de las rosas*'.

Téngase presente —pues, de otro modo, y a la vista del carácter escasamente informativo de esta conclusión, sería fácil el sarcasmo— que la regla que nos ocupa es sencillamente una regla *de introducción* de descripciones propias. Su misión no es, pues, llevarnos a conclusiones novedosas, sino permitirnos introducir una descripción cuando se tiene la garantía —expresada por la premisa de la regla— de que se cumplen las condiciones para que la descripción sea propia.

8.ª *Regla de Introducción de Descripciones Impropias* (RDI).

Aunque no vamos a utilizarla, la expondremos por rozones de simetría.

Como se recordará, decíamos que una descripción es impropia cuando no se cumple la condición de que haya uno y un solo objeto que la satisfaga.

Para entender el sentido de esta regla quizá sea oportuno recordar la noción de clase vacía. Llamábamos clase vacía a aquella que carece de miembros, y decíamos que, si bien pueden formarse clases sin miembros en número infinito, estamos autorizados a hablar de '*la* clase vacía', ya que todas ellas son idénticas, son la misma.

Pues bien: ¿cómo definir la clase vacía? Suele hacerse así:

$$\phi = \{x \mid (x \neq x)\}$$

La clase vacía sería la clase de todas aquellas entidades que no son idénticas a sí mismas. No hay ninguna entidad que no sea idéntica a sí misma, y ello garantiza la vaciedad de esa clase.

Pues bien: con las descripciones impropias ocurre algo análogo. Así como en un curioso sentido puede decirse que todas las clases vacías tienen los mismos miembros (a saber, ninguno), así también cabe decir que todas las descripciones imporpias tienen la misma denotación: el vacío. Y así como a la clase vacía se la define como $\{x \mid (x \neq x)\}$, así también podríamos asignar a todas las descripciones imporpias una misma denotación cuya vaciedad estuviera garantizada: diremos que una descripción impropia designa

$$\iota x(x \neq x)$$

La Regla de Introducción de las Descripciones Impropias tendrá esta forma:

RDI

$$\frac{\neg \bigvee y \bigwedge x [\varphi x \leftrightarrow (x = y)]}{\iota x \varphi x = \iota z (z \neq z)}$$

Quiere decirse: cuando no se cumplen las condiciones que hacen de una descripción una descripción propia —y la premisa de la regla lo que dice precisamente es que no se cumplen—, entonces puede introducirse una descripción impropia. Que es impropia se muestra en que hace referencia a un individuo que no existe, pues no existe el individuo que no es idéntico a sí mismo.

Con esto tenemos las ocho reglas básicas específicas del cálculo de predicados de primer orden con identidad y descripciones. Vamos ahora a integrarlas con las de la lógica de enunciados para componer así el sistema de reglas de inferencia de la lógica de primer orden entera.

La lógica de primer orden como cálculo de deducción natural

I. Símbolos del cálculo
   A) Símbolos lógicos
      Conectivas: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
      Cuantificadores: $\bigwedge$, $\bigvee$
      Signo de identidad: $=$
      Símbolo de las descripciones definidas: ι
   B) Símbolos no lógicos
      Letras de enunciados: $p, q, r, s, t, ..., p_n, q_n, r_n, s_n, t_n$
      Letras de predicado: $P, Q, R, ..., P_n, Q_n, R_n$
      Letras de individuo: variables: $x, y, z, ..., x_n, y_n, z_n$; constantes: $a, b, c, ..., a_n, b_n, c_n$
      Signos de puntuación (comas, paréntesis, corchetes y llaves)

II. Reglas de formación
   RF1. Una letra de predicado n-ádica seguida de n constantes individuales es una fórmula bien formada.
   RF2. Una letra de enunciado sola es una fórmula bien formada.
   RF3. Si X es una fórmula bien formada, entonces $\neg X$ lo es.
   RF4. Si X e Y son fórmulas bien formadas, entonces $X \vee Y$, $X \wedge Y$, $X \rightarrow Y$ y $X \leftrightarrow Y$ también lo son.
   RF5. Si X es una fórmula bien formada que contiene n variables libres, $\bigwedge x_1, ..., x_n(X)$ y $\bigvee x_1, ..., x_n(X)$ son fórmulas bien formadas.
   RF6. Estas son todas las Reglas de Formación del Cálculo.

III. Reglas de inferencia
   A) Reglas primitivas

RI$\neg$

$$\frac{\begin{array}{|l} X \\ Y \wedge \neg Y \end{array}}{\neg X}$$

RE$\neg$

$$\frac{\neg\neg X}{X}$$

RI ∨

$$\frac{X}{X \vee Y}$$

RE ∨

$X \vee Y$
┌ X
└ Z
┌ Y
└ Z
———
Z

RI ∧

$$\frac{X \quad Y}{X \wedge Y}$$

RE ∧

$$\frac{X \wedge Y}{X \mid Y}$$

RI →

┌ X
└ Y
———
$X \rightarrow Y$

RE →

$$\frac{X \rightarrow Y \quad X}{Y}$$

RI ⋀ [334]

$$\frac{\varphi\alpha_1, ..., \alpha_n}{\bigwedge x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)}$$

RE ⋀

$$\frac{\bigwedge x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)}{\varphi\alpha_1, ..., \alpha_n}$$

RI ⋁

$$\frac{\varphi\alpha_1, ..., \alpha_n}{\bigvee x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)}$$

RE ⋁ [334]

$\bigvee x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)$
┌ $\varphi\alpha_1, ..., \alpha_n$
│
└ X
———
X

RI =

$$\frac{\varphi i}{\bigwedge x[(x = i) \rightarrow \varphi x]}$$

RE =

$$\frac{\bigwedge x[(x = i) \rightarrow \varphi x]}{\varphi i}$$

[334] Recuérdese que esta regla sólo es válida con las restricciones antes impuestas

RDP

$$\frac{\bigvee y \bigwedge x[\varphi x \leftrightarrow (x = y)]}{\varphi(\imath x \varphi x)}$$

RDI

$$\frac{\neg \bigvee y \bigwedge x[\varphi x \leftrightarrow (x = y)]}{\imath x \varphi x = \imath z (z \neq z)}$$

B) Algunas reglas derivadas

Reglas de interdefinición de las conectivas[335]:

$$\frac{X \wedge Y}{\neg(\neg X \vee \neg Y)} \qquad \frac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \vee \neg Y} \qquad \frac{X \rightarrow Y}{\neg X \vee Y}$$

$$\frac{X \vee Y}{\neg(\neg X \wedge \neg y)} \qquad \frac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y} \qquad \frac{X \rightarrow Y}{\neg(X \wedge \neg Y)}$$

$$\frac{X \vee Y}{\neg X \rightarrow Y} \qquad \frac{X \wedge Y}{\neg(X \rightarrow \neg Y)}$$

(con doble trazo horizontal)

Reglas relativas a la negación:

RI¬¬

$$\frac{X}{\neg\neg X}$$

REcq

$$\frac{X \wedge \neg X}{Y}$$

Reglas relativas a la disyunción:

RComm ∨

$$\frac{X \vee Y}{Y \vee X}$$

RIdem ∨

$$\frac{X \vee X}{X}$$

[335] En las ocho reglas siguientes se observará la presencia de un doble trazo horizontal que separa la premisa de la conclusión. Ello quiere decir que la aplicación de esas ocho reglas puede hacerse tanto de arriba a abajo como de abajo a arriba. Así, por ejemplo, la regla

$$\frac{X \vee Y}{\neg X \rightarrow Y}$$

equivale a las dos reglas

$$\frac{X \vee Y}{\neg X \rightarrow Y} \quad \text{y} \quad \frac{\neg X \rightarrow Y}{X \vee Y}$$

RIA$_1$

$$\begin{array}{l} X \lor Y \\ \neg X \\ \hline Y \end{array}$$

RIA$_2$

$$\begin{array}{l} X \lor Y \\ \neg Y \\ \hline X \end{array}$$

RDC$_1$

$$\begin{array}{l} X \lor Y \\ X \rightarrow Z \\ Y \rightarrow Z \\ \hline Z \end{array}$$

RDC$_2$

$$\begin{array}{l} X \lor Y \\ X \rightarrow Z \\ Y \rightarrow W \\ \hline Z \lor W \end{array}$$

RDD$_1$

$$\begin{array}{l} \neg X \lor \neg Y \\ Z \rightarrow X \\ Z \rightarrow Y \\ \hline \neg Z \end{array}$$

RDD$_2$

$$\begin{array}{l} \neg X \lor \neg Y \\ Z \rightarrow X \\ W \rightarrow Y \\ \hline \neg Z \lor \neg W \end{array}$$

RDstr $\lor$ por $\land$

$$\begin{array}{c} X \lor (Y \land Z) \\ \hline (X \lor Y) \land (X \lor Z) \end{array}$$

Reglas relativas a la conjunción

RComm $\land$

$$\begin{array}{c} X \land Y \\ \hline Y \land X \end{array}$$

RIdem $\land$

$$\begin{array}{c} X \land X \\ \hline X \end{array}$$

RDstr $\land$ por $\lor$

$$\begin{array}{c} X \land (Y \lor Z) \\ \hline (X \land Y) \lor (X \land Z) \end{array}$$

Reglas relativas al condicional

MT

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

RTrans $\rightarrow$

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow Z \end{array}$$

RImp

$$\begin{array}{c} X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \\ \hline (X \land Y) \rightarrow Z \end{array}$$

RExp

$$\begin{array}{c} (X \land Y) \rightarrow Z \\ \hline X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \end{array}$$

RContr $\rightarrow$

$$\begin{array}{c} X \rightarrow Y \\ \hline \neg Y \rightarrow \neg X \end{array}$$

RRfl $\rightarrow$

$$\begin{array}{c} X \\ \hline X \end{array}$$

Reglas relativas al bicondicional

RI $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow X \\ \hline X \leftrightarrow Y \end{array}$$

RD $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} X \leftrightarrow Y \\ \hline X \rightarrow Y \mid Y \rightarrow X \end{array}$$

RE$_1$ $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} X \leftrightarrow Y \\ X \\ \hline Y \end{array}$$

RE$_2$ $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} X \leftrightarrow Y \\ \neg Y \\ \hline \neg X \end{array}$$

RE$_3$ $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} X \leftrightarrow Y \\ Y \\ \hline X \end{array}$$

RE$_4$ $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} X \leftrightarrow Y \\ \neg X \\ \hline \neg Y \end{array}$$

RTrans $\rightarrow$

$$\begin{array}{l} X \leftrightarrow Y \\ Y \leftrightarrow Z \\ \hline X \leftrightarrow Z \end{array}$$

Reglas de interdefinición de los cuantificadores

Regla de definición del cuantificador universal[336]

RDf $\bigwedge$

$$\frac{\bigwedge x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)}{\neg \bigvee x_1, ..., x_n \neg (\varphi x_1, ..., x_n)}$$

Regla de definición del cuantificador particular[337]

RDf $\bigvee$

$$\frac{\bigvee x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)}{\neg \bigwedge x_1, ..., x_n \neg (\varphi x_1, ..., x_n)}$$

Regla de negación del cuantificador universal[338]

RNeg $\bigwedge$

$$\frac{\neg \bigwedge x_1, ..., x_n(\varphi x_1, ..., x_n)}{\bigvee x_1, ..., x_n \neg (\varphi x_1, ..., x_n)}$$

Regla de negación del cuantificador particular[339]

RNeg $\bigvee$

$$\frac{\neg \bigvee x_1, ..., x_n (\varphi x_1, ..., x_n)}{\bigwedge x_1, ..., x_n \neg (\varphi x_1, ..., x_n)}$$

[336] Restringida a la lógica de predicados monádicos, esta regla tendría la forma

$$\frac{\bigwedge x\varphi x}{\neg \bigvee x \neg \varphi x}.$$

[337] Para predicados monádicos sólo:

$$\frac{\bigvee x\varphi x}{\neg \bigwedge x \neg \varphi x}.$$

[338] En lógica de predicados monádicos:

$$\frac{\neg \bigwedge x\varphi x}{\bigvee x \neg \varphi x}.$$

[339] Con predicados monádicos:

$$\frac{\neg \bigvee x\varphi x}{\bigwedge x \neg \varphi x}.$$

Capítulo IV
MAS ALLA DE ESTE LIBRO

No ya una, sino múltiples veces hemos dicho que este libro está escrito con el estricto propósito de llevar al lector a la lógica formal, de iniciarle —con una mínima sensibilidad filosófica, un cierto sentido del humor y una irrefrenable preocupación por las «cuestiones de estilo»— en el dominio de los cálculos lógicos más elementales. Eso es lo que explica que determinadas cuestiones, o incluso determinados campos de investigación enteros, hayan sido pasados por alto: no nos interesaba tanto ser completos cuanto resultar atrayentes, ganando para la lógica formal a quienes necesitan emplearla o gocen haciéndolo (y la disyunción no es excluyente). Con otras palabras: éste no es un tratado de Lógica, sino —cosa muy distinta— una introducción a ella.

Con ello, sin embargo, no se quiere decir que debamos terminar aquí, tras haber expuesto la lógica de predicados de primer orden con identidad y descripciones. Si de lo que se trata es de seducir lógico-formalmente al lector, parece oportuno insinuar las múltiples posibilidades, tanto técnicas como filosóficas, que la lógica, más allá de lo explicado en este libro, alberga. A su exposición esquemática dedicamos este capítulo que, siendo como un epílogo de esta obra, quisiéramos ver convertido, para quienes nos lean, en prólogo de ulteriores lecturas.

Lo que sigue no es, por tanto, sino un conjunto de alusiones (eso sí: articuladas, organizadas) a algunos de los temas cuyo conocimiento resulta absolutamente inexcusable para todo aquel que quiera hablar, con propiedad y sin estulticia, de «la lógica» *simpliciter*. En efecto: la lógica —así, a secas— no es sólo lógica formal, pero es, y necesariamente, también lógica formal.

1. La lógica de predicados de orden superior

En el apartado 1 del capitulo III hay un epigrafe bajo el que se lleva a cabo una distinción entre lógica de predicados de primer orden y lógica de predicados de orden superior. Desde entonces, sin embargo, nada hemos vuelto a decir de esta última.

Como se recordará, la lógica de predicados de primer orden es aquélla en la que sólo se cuantifican las variables individuales, y no también las letras que esquematizan predicados.

Pero ya hemos dicho que no sólo no es imposible, sino que no resulta nada difícil imaginar enunciados, en absoluto insólitos, que encierran cuantificación de predicados. Sea, por ejemplo, la siguiente frase:

> Hay hombres capaces de repartir su amor entre mujeres que no tienen ninguna cualidad en común.

La presencia, en esta aserción, de la expresión 'ninguna cualidad' hace que, para su adecuada esquematización, hayamos de proceder a afectar con cuantificador una letra de predicado. Así, tal vez[340]:

$$\bigvee x\{Hx \wedge \bigvee y \bigvee z[(My \wedge Mz \wedge y \neq z) \wedge (Cxy \wedge Cxz) \wedge \wedge \neg \bigvee P(Py \wedge Pz)]\}$$ [341]

O bien —para poner otro ejemplo—:

> Hay al menos un rasgo que todos los regimenes autoritarios —sean de derechas o de izquierdas— comparten.

En esquema:

$$\bigvee P\{\bigwedge x\{Ax \rightarrow [(Dx \vee Ix) \rightarrow Px]\}\}$$ [342]

Etcétera.

Si fácil es encontrar en el lenguaje ordinario enunciados que sólo pueden ser adecuadamente esquematizados dentro de la lógica superior, menos dificultad encierra todavía encontrarlos en el lenguaje de la ciencia. En el lenguaje de la aritmética, sin ir más lejos. Uno de los principios

---

[340] Para simplificar, supondremos que se trata de *al menos dos* mujeres. Bien pensado, por otra parte, el ejemplo serviría también su fuera una mujer y dos hombres; o tres hombres; o tres mujeres. Etc.

[341] Es decir: 'Hay algún x tal que x es hombre y hay algún y y algún z tal que y es mujer y z es mujer e y y z son distintos y x es capaz de amar a y y x es capaz de amar a z y no hay ninguna propiedad P tal que y sea P y z sea P'.

[342] Es decir: 'hay alguna propiedad P tal que, para todo x, si x es un régimen autoritario, entonces, tanto si x es de derechas como de izquierdas, x posee'.

básicos de esta disciplina, a la que es común presentar como ejemplo de simplicidad, viene a decir lo siguiente:

> Toda propiedad que pertenece al número 1 y tal que, si pertenece a un número, pertenece también al que lo sigue en la serie, pertenece a todo número.

Las dos primeras palabras de este enunciado revelan ya que el lugar apropiado para su esquematización es la lógica de predicados de segundo orden:

$$\bigwedge P\{\{Pa \wedge \bigwedge x \bigwedge y[(Px \wedge Syx) \rightarrow Py]\} \rightarrow \bigwedge x\, Px\}$$ [343]

Y no es que en lógica de predicados esté «prohibido» cuantificar predicados (bien sean predicados de individuo, o predicados de predicados de individuo, etc.). Lo que ocurre es que, para llevar a cabo de modo sistemático el análisis formal de aquellos razonamientos en cuya validez intervienen predicados cuantificados, se requiere la construcción de un cálculo lógico que, además de desbordar en alcance al cálculo de predicados de primer orden, difiere esencialmente de éste. ¿Por qué difiere? Porque ese otro cálculo —un cálculo de predicados de segundo orden o, en general, de orden superior— carece de propiedades que nadie puede negar a la lógica de predicados de primer orden.

¿De qué tipo son esas propiedades que hacen —recuérdese la lógica de la identidad— que el cálculo de predicados de primer orden y el cálculo de predicados de orden superior no sean indiscernibles?

Son propiedades *metateóricas*.

2. La Metateoría

Como hemos señalado en más de una ocasión, hacer Metateoría de los cálculos lógicos es someterlos a consideración global por ver si responden a ciertos requisitos. En esta *Introducción a la lógica formal* nos hemos limitado casi exclusivamente a mostrar las aplicaciones de la lógica elemental por medio de múltiples ejemplos. Hemos, pues, por así decir, hecho descender la lógica al análisis de casos concretos de argumentación. Pero podríamos haber completado ese movimiento con otro de ascenso: podríamos haber ascendido hasta un plano desde donde nos fuera dado contemplar la lógica en su conjunto, desde donde pudiéramos hacer teoría formal de las teorías lógicas.

---

[343] 'Para toda propiedad P, si esa propiedad pertenece a 1 y si para todo x y para todo y, si el que x tenga la propiedad P e y sea el siguiente de x hace que y tenga también esa propiedad, entonces todo número tiene esa propiedad'.

Hacer Metateoría consiste principalmente en estudiar si los cálculos lógicos reúnen cierto tipo de propiedades o requisitos. Esos requisitos son fundamentalmente tres:

1.° El requisito de *consistencia*. Un cálculo es consistente cuando, siendo X una fórmula del cálculo, no es posible derivar en él a la vez X y $\neg X$. Y puesto que la caracterización que acabamos de dar de la consistencia es puramente sintáctica, daremos también una definición semántica de esta noción: puesto que estamos tratando con cálculos lógicos podemos decir que un cálculo es consistente cuando todas las fórmulas derivables en él son verdades lógicas.

2.° El requisito de *compleción*[344]. Un cálculo es completo, como sabemos, cuando en él se pueden demostrar todas las fórmulas verdaderas construibles con sus símbolos. En el caso de los cálculos lógicos, que es el que nos ocupa, esas fórmulas verdaderas serán verdaderas formalmente, lógicamente verdaderas.

3.° El requisito de *decidibilidad*. Se dice que un cálculo es decidible cuando existe en él al menos un procedimiento para decidir, en un número finito de pasos reglamentados, si una fórmula es verdadera o no (y, por ende, en el caso de que el sistema sea completo, si es o no derivable en él).

Ya hemos aludido a la existencia de una reciprocidad entre el requisito de consistencia y el requisito de compleción. El requisito de consistencia por respecto a un determinado cálculo supone la exigencia de que toda fórmula deducible en ese cálculo sea lógicamente verdadera. El requisito de compleción, por su parte, supone la exigencia de que toda fórmula lógicamente verdadera expresable en el simbolismo del cálculo sea deducible en él.

Cuando, impuestos de estos requisitos, sometemos a examen global los distintos cálculos lógicos, ¿qué podríamos decir de ellos?

Por lo que se refiere al cálculo de enunciados, ya hemos dicho que cumple tanto con el requisito de consistencia como con el de compleción[345]. Reúne asimismo el requisito de decidibilidad: disponemos de más de un procedimiento decisorio en este cálculo. Disponemos, por ejemplo, del método de las tablas de verdad.

Por lo que se refiere al cálculo de predicados de primer orden, podemos decir también que reúne los requisitos de consistencia y compleción: toda fórmula derivable en el cálculo de predicados de primer orden es lógicamente verdadera, y toda fórmula lógicamente verdadera

[344] Dada la inexistencia en castellano de un sustantivo que exprese la cualidad de ser completo, se suele utilizar el neologismo 'completud' o 'completitud'. Asesorados por filólogos, hemos optado por utilizar 'compleción'.

[345] En rigor, lo que habría que decir es que es posible —y se ha hecho en múltiples ocasiones— presentar el cálculo de enunciados como un sistema consistente.

formulable en el lenguaje del cálculo de predicados de primer orden es derivable en él. Especialmente importante es la demostración del carácter completo de este cálculo llevada a cabo por Kurt Gödel en 1930 (demostración que hoy día suele exponerse siguiendo las líneas establecidas por Leon Henkin en un trabajo de 1949).

Pero el cálculo de predicados de primer orden no es decidible en su conjunto, como ya hemos indicado. Lo son ciertos estratos como la lógica de predicados monádicos— o ciertos conjuntos de fórmulas —ciertos tipos de expresiones de la lógica de predicados poliádicos—, pero la lógica de predicados poliádicos es, como tal, indecidible, y, por lo tanto, lo es también la lógica general de predicados, que la incluye. Lo demostró Alonzo Church en 1936.

Por lo que se refiere a la lógica cuantificacional de orden superior, Kurt Gödel —el mismo que, como acabamos de decir, probó en 1930 la compleción de la lógica elemental— demostró, en un celebérrimo trabajo publicado en 1931, que es incompleta. Dicho de otro modo: mientras que la totalidad de las verdades formales acerca de cualesquiera individuos (que son las que expresamos en la lógica de predicados de primer orden) pueden ser organizadas en un cálculo lógico que las fundamente, las verdades lógicas acerca de cualesquiera conjuntos de individuos (o, si se prefiere, acerca de cualesquiera predicados de individuo) no pueden ser presentadas en su totalidad como el conjunto de los teoremas de un cálculo lógico[346]. Dicho de otro modo: no es posible construir un cálculo en el que puedan ser demostradas todas las verdades expresables en el simbolismo del cálculo de predicados de orden superior. El hecho de que Leon Henkin, en 1950, haya «mitigado», por así decir, el teorema de Gödel mostrando la posibilidad de alcanzar en lógica cuantificacional superior una cierta compleción, una compleción *secundum quid*, no priva básicamente a dicho resultado metateórico de su trascendencia para la lógica formal, para la filosofía de la lógica y, en definitiva, para la filosofía a secas.

Selección bibliográfica en relación con los dos apartados anteriores

De entre los tratados e introducciones a la lógica en los que se puede encontrar una presentación sistemática de la Metateoría, citaremos (por orden alfabético de los nombres de sus autores) los siguientes:

ANDERSON, J. M. y JOHNSTONE, H. W.: *Natural Deduction* (The Logical Basis of Axiom Systems). Belmont (California), Wadsworth Publishing Company, 1962.

CHURCH, A.: *Introduction to Mathematical Logic*. Vol. I. Princeton, Princeton University Press, 1956.

[346] Hemos glosado una formulación de Hintikka en J. Hintikka (ed.) *The Philosophy of Mathematics*. Oxford, Oxford University Press, 1969; Introducción, págs. 2-3.

GARRIDO, M.: *Lógica simbólica*. Vol. I: Madrid, Editorial Tecnos, 1973. Vol. II: *Ibidem*, 1974. Edición en un solo volumen: *Ibidem*, 1974; reimpr. 1977.

HILBERT, D. y ACKERMANN, W.: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlín, Springer Verlag, 1928; 4.ª ed., 1959. *Elementos de lógica teórica*. V. cast. de V. Sánchez de Zavala. Madrid, Editorial Tecnos, 1962.

HUNTER, G.: *Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First-Oder Logic*. Londres, Macmillan, 1971.

KLEENE, S. C.: *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam, North-Holland, 1952; reimpr. 1967. *Introducción a la metamatemática*. V. cast. de M. Garrido con la colaboración de R. Beneyto, J. Sanmartín y E. Casabán. Madrid, Editorial Tecnos, 1974.

MOSTERIN, J.: *Lógica de primer orden*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1970.

SACRISTAN, M.: *Introducción a la lógica y al análisis formal*. Barcelona, Ediciones Ariel, 1964; reimpr. 1970.

Sobre el teorema de incompleción de Gödel (1931) puede verse, como estudio monográfico:

NAGEL, E. y NEWMAN, J. R.: *Gödel's Proof*. N. York, N. York University Press, 1958. Hay, que sepamos, tres versiones castellanas de este libro:

—*La prueba de Gödel*. V. c. de R. Xirau. Méjico, Cuadernos del Centro de Estudios Filosóficos de la UNAM, 1959.

—*El teorema de Gödel*. V. c. de A. Martín. Madrid, Editorial Tecnos, 1970.

—Traducción parcial en la versión castellana de J. R. NEWMAN (ed.), *Matemática, verdad, realidad*. V. c. de M. Sacristán. Barcelona, Ediciones Grijalbo, 1974, págs. 79 y ss.

Como textos clásicos de Metateoría seleccionamos, también por orden alfabético, los siguientes:

CHURCH, A.: «A Note on the *Entscheidungsproblem*». En *The Journal of Symbolic Logic*, 1 (1936), págs. 40-1. Correcciones en el mismo número, págs. 101-2. V. inglesa en M. DAVIS (ed.), *The Undecidable (Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions)*. Hewlett (N. York), Raven Press, 1965.

GÖDEL, K.: «Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls». En *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37 (1930), págs. 349-360. V. inglesa en J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel (A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931)*. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967, págs. 582-91. V. c. en A. Deaño (ed.), *Lecturas de lógica formal*. Madrid, Alianza Editorial, en prensa.

GÖDEL, K.: «Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I». En *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), págs. 173-198. V. inglesa en M. DAVIS (ed.), cit., págs. 4-38 y en J. VAN HEIJENOORT (ed.), cit., págs. 596-616. V. c. en Valencia, Cuadernos Teorema, en prensa, y en A. Deaño (ed.), *Lecturas de lógica formal*, cit.

HENKIN, L.: «The completeness of the First-Order Funcional Calculus». En *The Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), págs. 159-66. Reimpr. en J. HINTIKKA (ed.), *Philosophy of Mathematics*. Oxford, Oxford University Press, 1969, págs. 51-63. V. c. en A. Deaño (ed.), *Lecturas de lógica formal*, cit.

HENKIN, L.: «Completeness in the Theory of Types». En *The Journal of Symbolic Logic*, 15 (1950), págs. 81-91. Reimpr. en J. HINTIKKA (ed.), *The Philosophy of Mathematics*, cit., págs. 51-63.

3. Las lógicas llamadas «no-clásicas»

Acaso el rasgo más llamativo —si no el más importante— del estado actual de la ciencia de la lógica formal sea la existencia, e incluso la proliferación, en derredor suyo, de las llamadas «lógicas no-clásicas».

¿A qué llamamos «lógicas no-clásicas»? Aunque ciertamente no es decir mucho, podríamos empezar diciendo que se trata de sistemas lógicos que difieren en uno o más rasgos de la lógica clásica.

Y, ¿a qué llamamos «lógica clásica»? No a la lógica tradicional, como tampoco a la forma de lógica desarrollada entre el Renacimiento y el siglo XIX y a la que algunos historiadores dan ese nombre[347]. Al hablar aquí de lógica nos referimos a la forma clásica de la lógica contemporánea: a la lógica —para describirla de modo impresionista— que Boole, Peirce y Schröder construyeron algebraicamente durante el siglo XIX y a la que Frege, en 1879, dio forma axiomática; la lógica que halla en los *Principia Mathematica* (1910-13) de Whitehead y Russell su texto de referencia. Es de esa lógica —de la lógica expuesta en este libro— de la que difieren las lógicas «no-clásicas».

La pregunta inevitable es ahora la siguiente: ¿cuáles son esos rasgos de la lógica clásica así entendida, por respecto a los cuales podemos medir la peculiaridad —y, por ende, establecer la naturaleza— de las lógicas no-clásicas?

Reflexionamos sobre la lógica clásica como un todo: no en el sentido de la Metateoría, a la que, como hemos visto, incumbe estudiar el rendimiento de los cálculos una vez construidos, sino en el sentido de examinar cuáles son los supuestos que se han utilizado en su construcción. Lo que ahora buscamos son aquellos supuestos *no estrictamente formales* contra cuyo fondo y sobre cuya base se despliega la lógica formal clásica, los cálculos lógicos que hemos expuesto en los capítulos II y III de este libro. ¿Qué es aquello —aquellos conceptos, aquellos principios— que se da por descontado al proceder a construir los sistemas lógicos «normales»?

Se dan por descontadas varias cosas: para empezar, se opera sobre el supuesto de que los enunciados que la lógica maneja —los enunciados que la lógica estudia en cuanto integrados en una estructura argumen-

[347] Cfr., por ejemplo, I. M. Bocheński: *Formale Logik*. Friburgo-Munich, Verlag Karl Alber, 1956. *Historia de la lógica formal*. Ed. esp. de M. Bravo. Madrid, Editorial Gredos, 1966, págs. 267 y ss.

tativa, es decir, en cuanto constitutivos de las premisas o de la conclusión de un razonamiento— son enunciados *apofánticos*, enunciados provistos de un valor de verdad.

Asimismo se actúa sobre la base de que los valores de verdad son solamente *dos*: el valor verdad y el valor falsedad. Los enunciados son o verdaderos o falsos.

Por otra parte, no se admiten matizaciones, por así decir, en los valores de verdad. Los enunciados son o *verdaderos a secas* o bien *falsos sin más*.

Un cuarto rasgo de la lógica clásica es que en ella sólo hallan cabida aquellas conexiones entre enunciados que son definibles como funciones de verdad. Es decir: aquellas conexiones entre enunciados que dan lugar a un enunciado compuesto cuyo valor de verdad está *enteramente* en función de los valores de verdad de los enunciados conectados. Así, la conjunción se puede definir como aquella conectiva que, al unir dos enunciados, produce un enunciado (compuesto) verdadero si y sólo si son verdaderos los dos enunciados componentes. Supongamos, sin embargo, que en vez de decir '$p \wedge q$' decimos '*a* cree que *p*'. Este enunciado podría ser verdadero tanto si *p* fuera verdadero como si fuera falso.

Podríamos seguir enumerando rasgos de la lógica, pero con los descritos bastará por el momento. Los resumiremos diciendo que la lógica clásica es *apofántica bivalente asertórica extensional*. *Apofántica*, porque deja fuera de consideración aquellos enunciados de los que no quepa preguntar con sentido si son verdaderos o falsos. *Bivalente*, porque no admite más que dos valores de verdad. *Asertórica*, porque excluye la existencia de «modalidades» de verdad y de falsedad. *Extensional*, porque si admitimos que toda expresión —un nombre, un predicado, un enunciado— tiene una *extensión* (que serían, respectivamente, un individuo, un conjunto y un valor de verdad) y una *intensión* (siendo la intensión de un nombre el «concepto individual» que designa, la intensión de un predicado la propiedad que significa y la intensión de un enunciado la proposición que expresa), la lógica clásica opera exclusivamente en términos de la primera. Así, por ejemplo, la lógica de enunciados tiene en cuenta únicamente la extensión de éstos, es decir, su valor de verdad: cuando, pongamos por caso, definimos el condicional, lo hacemos diciendo que es aquella relación entre enunciados que compone un enunciado verdadero cuando no es el caso que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.

Es por respecto a estas características de la lógica clásica y algunas otras que irán surgiendo en el curso de nuestra exposición como cabe entender la naturaleza de las distintas lógicas no-clásicas y los motivos que en uno u otro momento impulsaron a su construcción.

En lo que sigue no vamos a ofrecer una presentación sistemática, o sistematizada, de las lógicas no-clásicas. Ello supondría que contamos con una teoría acerca de los distintos tipos de lógicas «divergentes»

—como también se las llama— y acerca de la relación entre ellas y la lógica clásica. Y no es ése el caso. Aunque al final diremos algo acerca de la idea que nosotros nos hacemos de esa teoría (de la que tan necesitada está la lógica actual, al menos si la consideramos desde un punto de vista filosófico, como es el nuestro), por el momento nos limitaremos a enumerar con un cierto orden algunas de esas lógicas no-clásicas, caracterizándolas brevemente. Más que otra cosa, lo que haremos será «narrar», si cabe decirlo así, lógicas excéntricas, extravagentes[348].

Rompiendo el orden en que antes hemos señalado algunos de los supuestos no formales de la lógica clásica, empezaremos por un tipo de lógica divergente cuyas diferencias con respecto a la lógica que hemos venido estudiando son, al menos al principio, es pecialmente claras. Se trata de las llamadas «lógicas polivalentes».

La lógica polivalente[349]

«Mañana habrá una batalla naval». ¿Es verdadero, *hoy*, este enunciado? Si lo es, entonces el futuro está predeterminado: nada podrá impedir que mañana se libre una batalla naval. ¿Será, pues, falso? Si es falso *hoy* que mañana habrá una batalla naval, venimos a dar en algo semejante: no habrá posibilidad alguna de entablar mañana una batalla naval, y el futuro se nos escapa (o se nos impone) también por este lado.

Nos encontramos, pues, con que la batalla naval de mañana sería, o *necesaria* —si el enunciado que la enuncia la víspera es ya verdadero en ese momento— o *imposible* —si el tal enunciado es falso.

Ahora bien: parece obvio que la batalla naval de mañana es un evento futuro *contingente*. Contingente: es decir, ni necesario ni imposible.

Si queremos escapar a la paradoja de que nuestro futuro esté ya determinado desde siempre y para siempre —desoladora conclusión a la que nos vemos condenados en el caso de que aceptemos que todo enunciado acerca de eventos futuros contingentes es, en el instante de ser proferido, o bien verdadero o bien falso—, hemos de convenir en que

[348] Luego se verá que la excentricidad no es tanta, en casi todos los casos, como algunos de los defensores de esas lógicas creyeron en un principio.

[349] Si utilizamos el término «polivalente» es sólo por no crear desconcierto rompiendo una costumbre. En verdad, el término no hay por dónde cogerlo. En primer lugar, está la poco armónica combinación —de la que es ejemplo insigne el término «sociología»— de un vocablo griego y otro latino. «Multivalente», por ejemplo, sería mucho menos bastardo. En segundo lugar, parece imporpio el uso del sufijo «valente», porque sugiere que la lógica bivalente vale por dos y la polivalente por muchos, o para muchas cosas. Y no se trata de que la lógica bivalente valga para dos cosas, sino de que opera con dos valores.

No se nos ocurre, sin embargo, un rótulo alternativo que sea preferible, y por eso hemos recaído, aunque a regañadientes, en el uso de la denominación acostumbrada. Sin embargo, siempre que podamos acudiremos a la descripción 'lógicas que operan con más de dos valores de verdad'.

enunciados como «Mañana habrá una batalla naval» —o bien, por ejemplo, «La semana próxima se enamorará uno de mis amigos», o «El año que viene tendremos la sociedad sin clases»— no son, en el momento de ser proferidos, *ni verdaderos ni falsos*. Tendrán que tener un tercer valor de verdad.

El ejemplo de la batalla naval no es nuestro, sino de Aristóteles. Al reproducirlo, hemos tratado de reproducir también —simplificándola considerablemente— la reflexión que el fundador de la lógica formal se hizo sobre el asunto, reflexión que lo convierte, si no en el primer vislumbrador de las lógicas polivalentes, sí al menos en el primer autor que cuestionó el llamado por Łukasiewicz «Principio de Bivalencia», el principio según el cual todo enunciado es o bien verdadero o bien falso[350].

Sin embargo, tras este homenaje a su más remoto precursor no vamos a trazar una historia de las lógicas que operan con más de dos valores de verdad. Vamos simplemente a asomarnos a sus rudimentos.

Las lógicas polivalentes pueden ser, o *finitamente* polivalentes o *infinitamente* polivalentes, según que admitan valores intermedios en número finito o infinito entre el valor verdad y el valor falsedad.

Tomemos el apartado más elemental de la lógica —la lógica de enunciados y el caso más simple de polivalencia —una lógica con *tres* valores— y asomémonos así a la lógica proposicional trivalente. En ella un enunciado podría tener tres valores: 1 (verdad), 0 (falsedad) y $\frac{1}{2}$ (indeterminación, si queremos llamarlo así).

Tomemos, pues, un enunciado, que esquematizaremos con la letra '*p*':

p
1
$\frac{1}{2}$
0

Si negáramos ese enunciado, ¿qué valores de verdad obtendríamos?

p	$\neg p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

La única novedad está en que la negación de un enunciado con valor de verdad indeterminado es un enunciado con valor de verdad también indeterminado.

350 El texto de Aristóteles se encuentra en el *De Interpretatione*, 9, 18a28-19b4.

Tomemos ahora dos enunciados, cada uno de los cuales podrá tener *tres* valores de verdad. En lógica bivalente, las combinaciones posibles de los valores de verdad de n enunciados venían dados por la fórmula 2^n (si eran dos enunciados, cuatro combinaciones; si tres, ocho, etc.). En lógica trivalente, dados n enunciados será 3^n el número de las combinaciones posibles de sus valores de verdad. Sean, pues, dos enunciados. Nueve serán las combinaciones:

p	q
1	1
1	$\frac{1}{2}$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0
0	1
0	$\frac{1}{2}$
0	0

Veamos ahora qué valores de verdad obtendríamos si aplicásemos a estos argumentos las cuatro conectivas diádicas fundamentales:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	0
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	1

Hemos reproducido las condiciones de verdad que Łukasiewicz establece para las conectivas en lógica trivalente. Como puede verse, los criterios para la determinación de los valores de las funciones de verdad son los mismos que en la lógica bivalente. En efecto: convengamos en considerar el valor verdad como el más «distinguido», como «el mejor». Podemos decir, entonces, que, en lógica bivalente, la conjunción toma siempre el peor de los valores de sus argumentos: si uno de los enunciados que la forman es verdadero y el otro falso, falsa será la conjunción de ambos. También en lógica trivalente toma la conjunción la peor parte: si uno de sus miembros es verdadero y el otro indeterminado, el enunciado conjunto

será ideterminado; si uno de ellos es indeterminado y falso el otro, la conjunción será falsa.

En la disyunción ocurre al revés: que toma siempre la mejor parte. Y así es también en lógica trivalente. Entre verdad e indeterminación, el valor verdad; entre falsedad e indeterminación, el valor indeterminación.

Y lo mismo con el condicional: en lógica bivalente el condicional sólo es falso cuando el valor de verdad de su antecedente es «mejor» que el de su consecuente. En lógica trivalente ocurre de modo análogo: cuando el consecuente tiene un valor más bajo, o «peor», que el antecedente, el valor del enunciado condicional será el del consecuente[351].

Las mismas consideraciones por analogía valen para el bicondicional.

Piénsese, por lo demás, que estas tablas de verdad para las conectivas —que son, repetimos, las de Łukasiewicz en un momento dado— han sido puestas como puro ejemplo. Las lógicas polivalentes están en periodo constituyente, y ello significa que el campo está abierto a multitud de propuestas en este sentido.

Las lógicas trivalentes constituyen —ya lo hemos dicho, y, además, es obvio— el nivel más elemental de la lógica polivalente. No es difícil imaginar una lógica en la que se admitieran *cuatro* valores de verdad. En ella los enunciados podrán ser: 1) Verdaderos; 2) Mas bien verdaderos que falsos; 3) Más bien falsos que verdaderos; 4) Falsos. O *cinco*. En una lógica que operara con cinco valores de verdad habría, o podría haber: 1) Enunciados verdaderos; 2) Enunciados más bien verdaderos que falsos; 3) Enunciados indeterminados; 4) Enunciados más bien falsos que verdaderos; 5) Enunciados falsos.

Etcétera.

Sigamos con nuestro ejemplo de lógica trivalente. ¿Hay también en ella, como en el cálculo bivalente de enunciados, tautologías? Por supuesto que sí. Una expresión como

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$$

es, según puede comprobarse, una tautología también en lógica trivalente.

Tomemos, sin embargo, una tautología de las más notorias de la lógica bivalente, el *modus tollendo tollens* $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$. Hagamos su tabla de verdad en lógica trivalente:

[351] Con una excepción: según Łukasiewicz, cuando el antecedente tiene el valor $\frac{1}{2}$ y el consecuente el valor 0, el condicional vale $\frac{1}{2}$ (y no 0). Se puede discutir, aunque parece razonable el criterio de Łukasiewicz. Si el antecedente valiera 1, el condicional —valiendo 0 el consecuente— valdría 0. Si el antecedente valiera 0, el condicional valdría 1 (pues estaríamos en el caso 0-0). Pero valiendo el antecedente $\frac{1}{2}$, parece razonable reconocer que no podemos inclinarnos ni por la verdad ni por la falsedad del condicional así formado.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
1	1	1	0	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Tampoco es una tautologia el esquema:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)] \rightarrow \neg p$$

Su tabla verdad, en efecto, sería la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Ni tampoco sería una verdad formal, en lógica trivalente, la siguiente ley de la lógica de dos valores:

$$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$$ [352]

Como puede verse, todas estas expresiones que pierden su carácter tautológico al ser evaluadas en lógica trivalente pertenecen al grupo

[352] Su tabla de verdad:

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$
1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

de leyes llamadas «de reducción al absurdo». Es lógico que así sea, por cuanto la reducción al absurdo sólo opera como tal en una situación «binaria», es decir, en un contexto en el que '$p \vee \neg p$' es una tautología. Ahora bien: '$p \vee \neg p$' es el principio de *tercio excluso*. A nadie puede sorprender que la lógica trivalente —y, *a fortiori*, toda lógica que opere con más de tres valores— no se atenga a ese principio[353]. Porque es que las lógicas polivalèntes se construyen precisamente transgrediéndolo; no sólo no excluyen un tercer valor, sino que nacen de admitirlo.

En resumen: todas las expresiones que son tautológicas en lógica trivalente lo son también en lógica bivalente. La inversa, sin embargo, no es verdadera.

Aunque no falten precedentes en el siglo XIX, suelen considerarse como textos fundacionales de la lógica polivalente los de Łukasiewicz y Post. He aquí las referencias:

J. ŁUKASIEWICZ: «O logice trójwartościowej». En *Ruch Filozoficzny*, 5 (1920), páginas 170-1. «Sobre la lógica trivalente». V. cast. en J. Łukasiewicz, *Estudios de lógica y filosofía*. Selección, traducción y presentación de A. Deaño. Madrid, *Revista de Occidente*, 1975, págs. 41-2.

E. POST: «Introduction to a General Theory of Elementary Propositions». *American Journal of Mathematics*, vol. 43 (1921), págs. 163 y ss. Reimpr. en J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1967, págs. 264 y ss. V. cast. en A. Deaño (ed.), *Lecturas de lógica formal*. Madrid, Alianza Editorial (en prensa).

Un estudio histórico y sistemático muy completo de las lógicas polivalentes, acompañado de una bibliografía sobre el tema hasta el año 1965, puede encontrarse en:

N. RESCHER: *Many-Valued Logic*. Nueva York, MacGraw-Hill, 1969.

Ahora bien: hasta el momento hemos venido hablando de las lógicas polivalentes en abstracto, por así decir. Las hemos presentado como si fueran sobre todo un fruto de la imaginación lógico-formal pura, como si la introducción de otros valores de verdad además de los dos valores clásicos constituyera el resultado de un simple afán experimentador por parte de los lógicos, que quisieran ver lo que sucede cuando se aumenta el número de los valores de verdad admitidos. Y lo cierto es que las lógicas polivalentes no han surgido sólo —aunque sí hayan surgido

[353] Su tabla de verdad, en lógica trivalente, sería:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1

así a veces— como un intento de explotar las posibilidades bastractas de la lógica: han menudo han nacido para hacer frente a las *necesidades* de aplicación de esta ciencia. Hay, en efecto, lógicas que, siendo polivalentes, no llevan, sin embargo, ese nombre: y no lo llevan porque su carácter polivalente no es lo primario en ellos, sino algo que les viene impuesto por añadidura. Son sistemas lógicos no-clásicos construidos con la pretensión de proporcionar un instrumento más ajustado de análisis lógico en determinadas áreas del discurso; y resultó luego que el logro de dicha pretensión exigía la admisión de más de dos valores de verdad. Todo cuanto queremos decir quedará más claro con dos ejemplos.

El primer ejemplo de estas lógicas polivalentes que no lo son por principio sino por necesidad nos los proporciona la llamada «*lógica presuposicional*». El adjetivo que la califica hace referencia al fenómeno de la *presuposición*, cuya importancia para la teoría lingüística y, por ende, para la teoría lógica, es hoy plenamente reconocida[354]. Sin entrar aquí en cuestiones de detalle, nos limitaremos a caracterizar la presuposición desde un punto de vista lógico: señaladamente, desde un punto de vista semántico, concibiéndola como una relación entre enunciados analizada en términos de sus valores de verdad.

Decir que el enunciado X presupone el enunciado Y equivale a decir que el enunciado X no es ni verdadero ni falso a menos que el enunciado Y sea verdadero.

Dicho de otro modo:

El enunciado X presupone el enunciado Y exactamente cuando:

1. Si X es verdadero, entonces Y es verdadero.
2. Si X es falso, entonces Y es verdadero.

Algún autor[355] ha hablado de tres *paradigmas* de presuposición, de tres casos ejemplares en los que la presuposición se da. Pondremos un ejemplo de cada uno de ellos, a fin de que la anterior definición quede perfectamente clara.

En primer lugar, es claro que un enunciado como

El actual rey de Francia es calvo

presupone el enunciado

Existe actualmente un rey de Francia.

En efecto: para que el primero de esos dos enunciados sea *verdadero o falso* se necesita que el segundo sea verdadero. Para que el enunciado

[354] Como resumen denso y perfecto del estado de los estudios sobre la presuposición véase la introducción de V. Sánchez de Zavala a la Parte primera del volumen segundo de su compilación *Semántica y sintaxis en la lingüística transformatoria*. Madrid, Alianza Editorial, 1976, págs. 25 y ss.

[355] Cfr., p. e., D. E. Cooper: *Presupposition*. La Haya-París, Mouton & Co., 1974, pág. 25.

'El autor de la música de la ópera *Falstaff* murió en 1901' sea verdadero o falso hace falta que la descripción 'El autor de la música de la ópera *Falstaff*' no sea una descripción vacía. Hace falta, dicho de otra manera, que sea verdadero el enunciado 'Existió un autor de la música de la ópera *Falstaff*'.

Así pues, el primer caso paradigmático de presuposición está representado por los enunciados singulares: un enunciado con un sujeto individual —designado por un hombre o bien por una descripción— presupone la verdad del enunciado que afirma la existencia del individuo de que se trate.

Pasemos al segundo caso, al que ya nos hemos referido en el capítulo III de esta obra bajo el epígrafe «*La lógica y el mundo*». Un enunciado como

> Todos los que intentan hacer compatible el cristianismo con el marxismo son en el fondo cristianos

presupone el enunciado

> Existen personas que intentan hacer compatible el cristianismo con el marxismo.

Es decir: un enunciado universal presupone que su universo del discurso no es vacío. Un enunciado como 'Todos los poemas de Joyce son inferiores a su obra narrativa' (enunciado esquematizable como $\bigwedge x \bigwedge y\, [(Px \wedge Ny) \rightarrow Ixy]$)[356] presupone el enunciado 'Existen poemas de Joyce'. Un enunciado como 'Todas las declaraciones derechistas de Borges son olvidables' presupone que Borges ha hecho declaraciones derechistas.

En suma: un enunciado universal, esquematizable siempre como un enunciado en el que se dice que todos los que poseen una determinada propiedad poseen por ende también tal otra propiedad, presupone la verdad del enunciado que afirma que existen individuos de los que es verdadero el predicado que representa la primera de dichas propiedades.

El tercer caso paradigmático de presuposición no se refiere ni a términos singulares —nombres o descripciones— ni al cuantificador universal, sino a cierto tipo de verbos. Verbos como lamentar, olvidar, sentirse ofendido, darse cuenta, arrepentirse, etc., En efecto: un enunciado como

> Domínguez se dio cuenta de que no todos los filósofos analíticos son reaccionarios

presupone la verdad del enunciado 'No todos los filósofos analíticos son reaccionarios'. De modo parecido, el enunciado 'Lord Byron lamentó haber admirado a Napoleón' presupone el enunciado 'Lord Byron admiró

[356] Es decir: 'Para todo *x* y para todo *y*, si *x* es un poema de Joyce e *y* es una de sus obras narrativas, entonces *x* es inferior a *y*'.

a Napoleón'. El primero de estos enunciados no sería ni verdadero ni falso a menos que el segundo fuera verdadero.

Confiamos en que los ejemplos que hemos puesto sirvan para, de una parte, hacer entender cabalmente en qué consiste la relación de presuposición como relación lógica (semántica), y, de otra parte, para poner de manifiesto su importancia. La relación de presuposición no puede confundirse con la relación de *implicación* (a la que, sin embargo, se halla próxima). En efecto: decimos que un enunciado implica otro cuando:

1. Si el primero es verdadero, el segundo es verdadero.
2. Si el segundo es falso, el primero es falso.

La relación de implicación se despliega, por tanto, a través del *modus ponendo ponens* y del *modus tollendo tollens*. Como puede verse, la relación de presuposición y la relación de implicación tienen algo en común: cuando un enunciado implica otro, si el primero es verdadero también lo es el segundo. Lo mismo ocurre en el caso de la presuposición. Pero, por otra parte, ambas relaciones difieren en un aspecto crucial: mientras que en el caso de la implicación se cumple —diríamos incluso que por definición— el *modus tollendo tollens* (esto es: la ley según la cual la falsedad del enunciado implicado conlleva la falsedad del enunciado que lo implica), en el caso de la presuposición no puede decirse otro tanto. Cuando un enunciado presupone otro, la falsedad de este último no hace que el primero sea falso: lo que hace es que el primero no sea ni verdadero ni falso.

Así pues, la de presuposición es, por una parte, una relación peculiar entre enunciados, una relación entre enunciados irreductible a cualquier otra de las conocidas. Y es, por otra parte, una relación que es imposible no tener en cuenta si se quiere que la lógica formal conserve su —a nuestro juicio, indispensable— contacto con el lenguaje de la vida. En la explicación de esa esencial actividad humana consiste en hablar desempeña papel fundamental el entendimiento del fenómeno llamado 'presuposición'. Salvo que se defienda una concepción de la lógica que haga de ésta un a la postre cómodo lenguaje de laboratorio, parece inexcusable admitir en ella, con todas las consecuencias, el hecho de la presuposición. Y admitir ese hecho conlleva el reconocimiento de la posibilidad de que las presuposiciones fallen. Admitir, en un cálculo lógico, la relación de presuposición es admitir la eventualidad de que sean falsos los enunciados presupuestos por ciertos enunciados, lo cual equivale a admitir que estos últimos no son ni verdaderos ni falsos, como ocurriría, por poner un ejemplo, con el enunciado 'El dios de los ateos es implacable', ya que en este caso no sería verdadero —sería falso en virtud del significado mismo de los términos— que existiera cosa tal.

Pero si admitir la presuposición es ya admitir la posibilidad de que haya enunciados presupuestos que son falsos, admitir esto último es a su

vez admitir la existencia de enunciados que no son ni verdaderos ni falsos. Que no son ni verdaderos ni falsos porque para poder ser lo uno o lo otro sería preciso que fuera verdadero un enunciado —presupuesto por ellos— que no lo es. Enunciados como 'El rey de Nápoles es dipsómano', que no es ni verdadero ni falso porque Nápoles no es hoy un reino.

¿Qué hacer, entonces? O bien excluir, por procedimientos más o menos refinados, la molesta existencia de presuposiciones*, haciendo de ellas una enfadosa particularidad del «lenguaje de la vida» de la que la lógica puede prescindir; o bien construir sistemas lógicos que hagan un *hueco* a esa relación semántica —la de presuposición— y, conscientes de lo que ello acarrea, se presenten como sistemas polivalentes: sistemas donde los enunciados puedan ser o verdaderos o falsos o (si presuponen enunciados que son falsos) ni lo uno ni lo otro. La relación de presuposición se volvería trivial —y no lo es— si redujésemos las posibilidades de verdad de los enunciados a dos: la verdad y la falsedad, el 1 y el 0.

He aquí algunas referencias sobre la lógica de la presuposición:

D. E. COOPER, *Presupposition*. La Haya-París, Mouton, 1974.

B. C. VAN FRAASSEN, «Presuppositions, Supervaluations, and Free Logic», en K. Lambert (ed.), *The Logical Way of Doing Things*. New Haven y Londres, Yale University Press, 1969, pp. 67 y ss.

Sobre la presuposición en general:

G. FREGE, «Über Sinn und Bedeutung». *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 100 (1892), págs. 25 y ss. V. e. —entre otras— en *Estudios sobre semántica*. Tr. de U. Moulines. Barcelona, Ed. Ariel, 1971, págs. 49 y ss.

B. RUSSELL, «On Denoting». *Mind*, N. S., Vol. 14 (1905), págs. 479 y ss. V. e. en *Lógica y Conocimiento*. Tr. de J. Muguerza. Madrid, Taurus, 1966, págs. 51 y ss.

P. F. STRAWSON, «On Referring». *Mind*, LIX (1950), págs. 320 y ss. V. e. en T. M. Simpson (ed.), *Semántica filosófica*: *problemas y discusiones*. Buenos Aires, Siglo XXI, 1973, págs. 57 y ss. «Identifying Reference and Truth-Values», *Theoria*, Vol. 30 (1964), págs. 439 y ss. Y en *Logico-Linguistic Papers*. Londres, Methuen, 1971, págs. 75 y ss.

H. LEONARD, «The Logic of Existence». *Philosophical Studies*, 7 (1956), págs. 49 y ss.

Un segundo ejemplo de esas lógicas que, como la presuposicional, no son polivalentes por principio sino por necesidad nos lo proporciona

* En este punto quedó interrumpido el manuscrito de Alfredo Deaño. Lo que resta, hasta el final del capítulo IV, ha sido reconstruido a partir de notas sueltas y escritos anteriores sobre temas afines. Aunque por ese camino resulta imposible formar una exposición sistemática y coherente de las ideas más recientes de A. Deaño, al menos se puede salir del paso, dando al capítulo un aspecto completo. (Todas las notas que, en lo sucesivo, se indiquen por medio de asterisco proceden de los editores.)

la llamada «lógica de los *enunciados vagos (fuzzy logic)*»[357]. El tema de la vaguedad —de la ambigüedad, de la imprecisión, del carácter borroso de ciertos términos o enunciados— viene siendo objeto de la atención de los lógicos desde hace tiempo. Ultimamente, sin embargo, su tratamiento formal sistemático está alcanzando un especial relieve.

Frente a la teoría clásica de conjuntos —en la que se da por descontado que los conjuntos tienen bordes nítidamente trazados (no en vano se los presenta habitualmente mediante un círculo), de tal modo que cabría en cada caso decidir con toda rotundidad si un determinado individuo es o no miembro de ellos—, Lofti Zadeh ha comenzado a elaborar una teoría de los conjuntos vagos o borrosos, por respecto a los cuales cabría hablar de grados o matices de pertenencia. Así, frente a la teoría «normal» de conjuntos, que presupone que los conjuntos tienen bordes nítidos, bien perfilados, se alzaría la exigencia de hacer la teoría de aquellos conjuntos —que son, evidentemente, la mayoría— cuyos bordes están difusos, como si los viéramos a través de un cristal empañado. El concepto 'número primo' no es un concepto borroso, y por ello no es un conjunto borroso el de los números primos. Pero, ¿qué decir de conceptos tales como el de 'persona alta' (¿cuánto hay que medir para ser alto?), el de 'libro voluminoso', o, si se prefiere un ejemplo menos trivial, 'filosofía crítica'?

Sobre esta línea retoma George Lakoff el estudio de lo que los lingüistas llaman «*cercas semánticas (semantic hedges)*. Como dice Victor Sánchez de Zavala[357bis], las cercas semánticas son «expresiones principalmente adverbiales que «cercan» algunos rasgos semánticos (posiblemente todos ellos) de la expresión a que modifiquen, resaltándolos positiva o negativamente». Cercas semánticas son, por ejemplo, la siguientes expresiones:

una especie de
auténticamente
más... que otra cosa
estrictamente
en un cierto sentido
aproximadamente
en sentido técnico
en términos generales
considerablemente
etc.

Se trata, según Lakoff, de palabras cuyo significado conlleva implícitamente borrosidad, palabras cuya función es hacer las cosas más o menos

[357] No parece oportuno adoptar una traducción literal y hablar de «lógica vaga o borrosa». Lo vago no es la teoría, sino el objeto que estudia. De otro modo, sería como explicar tartamudeando una teoría sobre las causas de la tartamudez.

[357bis] «Unidades, constricciones y límites de la lingüística transformatoria». En *Revista Española de Lingüística*, año 5, Fasc. 1 (enero-junio, 1975), págs. 45-86; pág. 65, n.31.

borrosas. Desde el punto de vista lingüístico se trata de un tema en absoluto intrascendente o de puro detalle. Piénsese, por ejemplo, en la cerca semántica 'una especie de' y supóngase que alguien dice: 'Hegel era una especie de lechuza'. Se reparará entonces en lo siguiente: al decir de alguien que es «una especie de lechuza», estamos, por medio de esa cerca semántica, afirmando las connotaciones del predicado 'lechuza' al tiempo que presuponemos la negación del significado literal. Es evidente que Hegel no era, *literalmente*, una lechuza, aunque pueda decirse —y con matiz meliorativo— que posee algunos de los rasgos de ese animal (aquellos, por ejemplo, que permitían hablar al propio Hegel de la «lechuza de Minerva»). Ahora bien: se piensa de ordinario que esta distinción entre el significado literal y el significado connotativo de una expresión corresponde a la distinción entre dos grandes ramas de la semiótica: la semántica y la pragmática. Se da, en efecto, por descontado que las connotaciones de las palabras forman parte de la pragmática, y que los aspectos pragmáticos del significado no entran en juego a la hora de la asignación de valores de verdad, interviniendo en ello exclusivamente el significado literal. Habría, así, una frontera entre la pragmática y la semántica.

Pero, he aquí que, en frases como éstas en que aparece el giro 'una especie de', nos encontramos con que el valor de verdad no depende estrictamente del significado literal de las expresiones que en ella figuran, sino que está en función también de sus connotaciones. Ello indica, en opinión de Lakoff, que la semántica y la pragmática, lejos de poder considerarse independientes, se hallan inextricablemente ligadas.

Pues bien, según Lakoff, esos conceptos borrosos —en sí mismos borrosos, o borrosos por hallarse semánticamente cercados— exigen, para poder ser objeto de «un tratamiento serio dentro de la semántica formal», una teoría lógica peculiar. Volviendo a nuestro tema, diríamos que aquellos razonamientos en los que figuran enunciados borrosos requieren, a lo que parece, un tratamiento lógico específico, una «*fuzzy logic*».

Por otro lado, psicólogos como Eleanor Heider han realizado experiencias de las que parece desprenderse que esos conjuntos borrosos no escasean, y que lo normal es que la pertenencia de un individuo a un conjunto sea una cuestión de grado.

Si la mayoría de los conceptos del lenguaje ordinario son vagos, no faltarán en el lenguaje ordinario los enunciados vagos, como tampoco los vagos razonamientos. No sólo no faltarán, sino que serán lo habitual. Ni la lógica ni mucho menos la lingüística pueden permanecer ajenas a este hecho. ¿Por qué no adoptar, entonces, una lógica que asuma la vaguedad reinante en el lenguaje, una lógica construida sobre la idea de que la verdad y la falsedad son valores límites de los enunciados, y que entre esos dos extremos caben múltiples posibilidades?

Dicho así cabría pensar que nos hallamos ante una lógica polivalente más. Ello sólo es así en cierto sentido. En lógica polivalente ordinaria

hay valores intermedios —uno, o infinitos—, pero esos valores están bien precisados, y a cada enunciado se le asigna uno y uno sólo de ellos. Sin embargo, en ésta que podríamos llamar «lógica formal con inclusión de la vaguedad» se reconoce la posibilidad de que haya enunciados que no tengan un único valor de verdad, es decir, que haya enunciados que sean verdaderos en cierto sentido —en cierto contexto— y falsos en otro. En semejante lógica, por ejemplo, una expresión como «*p* o no-*p*» no sería una verdad formal, y una expresión como «*p* y no-*p*» no sería una contradicción.

Sobre la lógica de los enunciados vagos puede verse:

L. ZADEH, «Fuzzy Sets». *Information and Control*, 8 (1965), págs. 338 y ss.

J. A. GOGUEN, «The Logic of Inexact Concepts». *Synthese*, 19 (1969), págs. 325 y ss.

G. LAKOFF, «Hedges: A Study in Meaning Criteria and the Logic of Fuzzy Concepts». En D. Hockney *et al.* (eds.), *Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics*. Dordrecht, D. Reidel P. C., 1975, págs. 221 y ss.

L. A. ZADEH, KING-SUN FU, K. TANAKA y M. SHIMURA (eds.), *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes*. Nueva York, San Francisco y Londres, Academic Press, Inc., 1975.

Revista *Synthese*: Número monográfico dedicado a «The Logic Semantics of Vagueness». Vol. 30, núms. 3-4 (1975).

Sobre la lógica polivalente en general puede verse, aparte de los mapas sobre el conjunto de las lógicas no clásicas de

N. RESCHER, «Desarrollos y orientaciones recientes en lógica». *Teorema*, 2 (junio 1971), págs. 51 y ss.

S. HAACK, *Deviant Logic*. Cambridge, Cambridge University Press, 1974.

las siguientes obras:

J. B. ROSSER-A. R. TURQUETTE, *Many-Valued Logics*. Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1952.

A. A. ZINOV'EV, *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*. V. inglesa de G. Küng y D. D. Comey. Dordrecht (Holanda), D. Reidel Publishing Company, 1963.

La lógica modal

Otra característica de la lógica clásica es que se trata de una lógica puramente asertórica. Quiere decirse: no es sólo que los valores de verdad en ella considerados sean únicamente dos. Es, además, que los enunciados —las entidades de las que se predica la verdad y la falsedad— son o bien verdaderos a secas o bien falsos a secas, sin matices. Dicho de otro modo: en la lógica que hemos venido viendo no hay más que dos alternativas: o se afir-

ma una proposición como verdadera sin más, o se afirma una proposición como falsa sin más. Por lo tanto, no hay, en primer lugar, valores intermedios —cuya admisión, como acabamos de ver, conduciría a las lógicas polivalentes—, ni tampoco hay, en segundo lugar, matices. Quiere decirse: no se admiten *modalidades* de esa verdad o de esa falsedad. Pues bien, la lógica que se ocupa de esos matices se conoce como «lógica modal».

La lógica modal cabe entenderla en dos sentidos: en sentido restringido y en sentido amplio. El sentido restringido de la lógica modal es el sentido clásico. En la lógica modal así entendida sólo se estudiarían las hoy llamadas «modalidades *aléticas*» o modalidades de verdad. Modalidades de verdad serían «necesario», «posible», «imposible» y «contingente». La lógica modal alética —organizada, como cualquier otra lógica *formal*, en un cálculo de enunciados y un cálculo de predicados de distintos órdenes— estudiaría las relaciones de inferencia entre enunciados afectados por algunos de esos operadores modales. Comencemos con la lógica modal en sentido clásico.

En el discurso ordinario no nos limitamos muchas veces a decir, por ejemplo, que p (o que no-p) sin más, sino que matizamos. Y decimos también, por ejemplo:

es necesario que p
es posible que p
es imposible que p
no es posible que no-p
no es imposible que p
es imposible que no-p
etc.

A estas cláusulas —'*es necesario que...*', '*es posible que...*', '*es imposible que...*'— se las llama *operadores modales*.

La lógica modal nace con Aristóteles. Fue él, en efecto, el primero en comprender que las nociones modales desempeñan un papel decisivo en la validez de ciertos tipos de inferencia. No vamos, sin embargo, por razones obvias, a seguir aquí todas las peripecias habidas en la historia del análisis lógico de las modalidades, sino que nos limitaremos a intentar mostrar cuál es el sentido radical de este apartado de la lógica.

Con ayuda de la negación, todas las nociones modales pueden reducirse a una. Y esa una puede ser, o bien la noción de necesidad, o bien la noción de posibilidad.

Convengamos en simbolizar la cláusula '*es necesario que...*' por '□'. Una fórmula como:

$$\Box p$$

se leerá, entonces, 'es necesario que p'.

Una expresión como:

$$\Box \neg p$$

se leerá: 'Es necesario que no-p'. O, lo que es lo mismo: 'Es imposible que p'.

Por su parte, la fórmula

$$\neg \Box \neg p$$

querrá decir: 'No es necesario que no-p'. Dicho de otro modo: 'Es posible que p'.

Tomemos ahora como primitiva la noción de posibilidad. Representaremos '*es posible que...*' con el símbolo '◇'. Tendremos entonces:

$\Diamond p$	'Es posible que p'
$\neg \Diamond p$	'No es posible que p' = 'Es imposible que p'
$\neg \Diamond \neg p$	'No es posible que no-p' = 'Es necesario que p'

En un sistema modal, por tanto, podría introducirse '□' como símbolo primitivo, y definir '◇' como '¬ □ ¬'. O introducir '◇' como primitivo, y definir '□' como '¬ ◇ ¬'.

Enunciemos algunas leyes de la lógica modal proposicional. Por ejemplo:

(1) $p \rightarrow \Diamond p$
(2) $\Box p \rightarrow p$
(3) $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
(4) $\neg \Diamond (p \vee q) \leftrightarrow (\neg \Diamond p \wedge \neg \Diamond q)$
(5) $\Diamond (p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
(6) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box (p \vee q)$
(7) $\Diamond (p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$
Etcétera.

De una parte, pues, la lógica modal puede entenderse como un sistema lógico específico en el que se estudian las relaciones de inferencia entre proposiciones afectadas por operadores modales. Así lo hizo Aristóteles en su sistema de silogística modal. Así lo hicieron los lógicos de la Baja Edad Media formulando —al nivel de la lógica de enunciados, y en la forma de reglas de inferencia— *consequentiae modales* (por ejemplo: *ab opportere ad esse valet consequentia*[359], o *ab esse ad posee valet consequentia*)[359].

[358] Regla que equivale a la ley (2) arriba expuesta.
[359] Regla que equivale a la ley (1) arriba expuesta.

Pero hay otro modo de entender la lógica modal. Entendida de ese modo queda patente toda su importancia y, aún más, toda su radicalidad dentro de la teoría de la validez formal de la inferencia, dentro de la lógica formal. La lógica modal puede entenderse como el estudio de la noción de *necesidad lógica.*

En efecto: ¿Cómo define Aristóteles el silogismo, o la inferencia válida en general? Como aquel discurso en el que, puestas ciertas cosas, por el hecho de haberlas puesto se sigue *necesariamente* algo distinto de ellas. Hemos dicho repetidas veces que un razonamiento es formalmente válido cuando, si sus premisas son verdaderas, *necesariamente* lo es también su conclusión. O, dicho de otro modo, cuando es *imposible* que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa.

Obsérvese: no es que en una inferencia válida la conclusión sea verdadera con verdad necesaria. No. Es que es necesario que sea verdadera si lo son las premisas. La necesidad no se refiere ni a las premisas ni a la conclusión, sino *al nexo entre unas y otras.* Es decir, no se trata de que si es verdad que $p \rightarrow q$ y es verdad que p entonces $\Box\, q$. Se trata de que

$$\Box\, \{[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q\}$$

Donde el operador $\Box$ afecta directamente al condicional que representa el paso de las premisas a la conclusión.

Nos encontramos entonces con que el «objeto formal» —para hablar en los términos tradicionales— de la lógica no puede ser definido sin recursos a nociones modales.

Es esencial a este respecto la obra de C. I. Lewis[360]. Según Lewis, la noción básica de la lógica —que es la relación de deducibilidad ('Y es deducible de X', o lo que es lo mismo, 'Y se sigue formalmente de X')— es algo demasiado serio como para representarlo mediante un condicional, símbolo de una relación excesivamente débil.

Frente a la 'implicación material' —que es, como sabemos, otro nombre del condicional— Lewis forja la 'implicación *estricta*'. Su propósito es el de construir un cálculo en el que 'p implica q' sea sinónimo de 'q es deducible de p'. Recuérdese que '$p \rightarrow q$' significa, simplemente: 'no es el caso que p sea verdadero y q falso'. Recuérdese que la implicación así entendida —como implicación material— conduce a paradojas, que podríamos resumir en las tautologías siguientes:

$$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$$
$$q \rightarrow (p \rightarrow q)$$

[360] Cfr. C. I. Lewis y C. H. Langford, *Symbolic Logic.* Publicada en 1932. Reeditada en 1959 por Dover Publications, Nueva York. Para lo que sigue, véanse especialmente los capítulos VI y VIII.

Es decir: si un enunciado es falso, todo condicional que lo tenga como antecedente será verdadero. Y si un enunciado es verdadero, será verdadero todo condicional en el que ese enunciado figure como consecuente.

Únese a esto el hecho de que en el cálculo de la implicación material no es posible trazar la distinción —cuya importancia no hace falta encarecer— entre proposiciones simplemente verdaderas y proposiciones lógicamente necesarias, y entre proposiciones meramente falsas y proposiciones auto-contradictorias o absurdas.

Por si fuera poco, hay algo más que impide que la implicación material, $p \rightarrow q$, tenga las propiedades de la relación 'q es deducible de p', y es que, en términos de implicación material, no hay dos proposiciones que puedan ser a un tiempo consistentes e independientes. Una proposición es consistente con otra cuando de la verdad de la primera no se sigue la falsedad de la segunda, y una proposición es independiente de otra cuando de la verdad de la primera no se sigue la verdad de la segunda.

Si representamos la relación 'Y se sigue de X' mediante un condicional —'$X \rightarrow Y$'— es obvio que dos enunciados no pueden ser a la vez consistentes e independientes. En efecto: dos enunciados, p y q, serán consistentes si

$$\neg (p \rightarrow \neg q)$$

Ahora bien: de eso se sigue

$$p \rightarrow q$$

Y eso es la negación de que p y q sean independientes. Porque p y q son independientes si se cumple

$$\neg (p \rightarrow q)$$

En suma: en la lógica «normal» —la que nos ha ocupado a todo lo largo de este libro— ocurre que, dados dos enunciados, o bien el primero es condición del segundo o bien es condición de la negación de éste. Con otras palabras: el esquema

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$$

es una tautología.

Así, pues, viene a decir Lewis, si la lógica aspira a presentarse como un canon de la inferencia deductiva, tiene que definir de manera más estricta esa relación de deducibilidad que constituye el núcleo de sus preocupaciones.

Y Lewis define la implicación estricta. Su símbolo es

$$X \mathbin{-\!\!3} Y =_{Df.} \neg \Diamond (X \wedge \neg Y)$$

Lo esencial es la presencia, en la definición, de la noción de posibilidad.

Por supuesto que si un enunciado implica estrictamente otro también lo implica materialmente (es decir, también es verdadero el condicional formado por ellos). Así, pues, si se cumple

$$p \mathbin{-\!\!3} q$$

se cumple también

$$p \rightarrow q$$ [361]

Ni que decir tiene que la inversa no es cierta.

Esperamos que con las consideraciones hechas hasta aquí quede —esa es nuestra única intención— suscitado el tema de la lógica modal.

Ya sabemos que podemos no limitarnos a decir «*p*» o «*q*», diciendo también «es necesario que *p*», «es imposible que *q*», etc.

He aquí algunas referencias a textos sobre lógica modal:

R. CARNAP, *Meaning and Necessity* (A Study in Semantics and Modal Logic). Chicago y Londres, The University of Chicago Press, 1947; 2.ª ed. ampliada, 1956.
G. E. HUGHES-M. J. CRESSWELL, *An Introduction to Modal Logic*. Londres, Methuen and Co., 1968. V. cast. de E. Guisan: *Introducción a la lógica modal*. Madrid, Tecnos, 1973.

Ahora bien: las modalidades de que hemos hablado no son las únicas. Todavía nos quedan más posibilidades, de las que hacemos uso constantemente. Decimos, por ejemplo,

es obligatorio que *p*
está permitido que *p*
está prohibido que *p*

Este tipo de modalidad —«obligatorio», «permitido», «prohibido» (en las que no es difícil reconocer un paralelismo con «necesario», «posible», «imposible», respectivamente)— reciben el nombre de «modalidades deónticas». A las modalidades que nos han ocupado hasta aquí se las denomina «modalidades *aléticas*». «Aléticas», de «ἀλήθεια», «verdad».

[361] Es decir, $(p \mathbin{-\!\!3} q) \mathbin{-\!\!3} (p \rightarrow q)$. Véase A. R. Anderson y N. De Belnap, Jr., «The Pure Calculus of Entailment». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 27, n.º 1 (1962), págs. 19 y ss.

El estudio de la lógica modal alética se remonta, como es bien sabido, a Aristóteles. Sin embargo, desde hace aproximadamente veinticinco años —desde los trabajos de Von Wright de 1951—, la denominación «lógica modal» se emplea también, como decíamos al comienzo de esta sección, en una acepción más amplia. Además de las modalidades aléticas, existirían modalidades *epistémicas* —verificado, no decidido y falsado o refutado—, *existenciales* —universal, existente, vacío— y modalidades *deónticas* —como las mencionadas en el párrafo anterior—. De especial interés son estas últimas, cuyo estudio es objeto de la *lógica deóntica*.

La lógica deóntica —a la que es razonable considerar como una rama o desarrollo peculiar de la lógica modal—, se ocuparía de las relaciones de inferencia entre normas, es decir, entre proposiciones prescriptivas. Cierto que las normas no tienen, a lo que parece, valores de verdad. Ello no impide, sin embargo, que entre ellas puedan entablarse relaciones lógicas. Así, por ejemplo, de que algo sea obligatorio puede seguirse que alguna otra cosa está prohibida.

Entre las obras sobre lógica deóntica hacemos referencia en primer lugar al espléndido trabajo de

M. SANCHEZ MAZAS, *Cálculo de las Normas*. Barcelona, Ariel, 1970.

Hay que señalar el importante significado que para la lógica encierra el nacimiento y presente acelerado desarrollo de esta disciplina entre otras. Durante siglos —y con sólo algunas excepciones aisladas—, la lógica se había ocupado exclusivamente de lo que desde Aristóteles se llama «discurso apofántico», es decir, de aquel tipo de discurso cuyos enunciados tienen un valor de verdad. Por esa razón, en lógica clásica se habla de valores de verdad y de funciones de verdad. Como no tiene sentido decir de una norma que es verdadera o falsa, en lógica deóntica habrá que hablar, no del valor verdad o del valor falsedad (o no sólo de ellos, que podrían atribuirse a las aserciones sobre normas), sino, por ejemplo, de *valores de ejecución o de validez*; y de *funciones de ejecución*, por ejemplo, en vez de o además de las funciones de verdad.

He aquí algunos trabajos sobre lógica deóntica:

R. HILPINEN, *Deontic Logic* (Introductory and Systematic Reading). Dordrecht (Holanda), D. Reidel Publishing Company, 1971.
G. KALINOWSKI, *La logique des normes*. Paris, PUF, 1972. *Lógica del discurso normativo*. V. e. de J. R. Capella. Madrid, Tecnos, 1975.
A. ROSS, *Directives and Norms*. Routledge and Kegan Paul, 1968. V. cast. de J. Hierro: *Lógica de las normas*. Madrid, Editorial Tecnos, 1971.
G. H. v. WRIGHT, «Deontic Logic». *Mind*, vol. LX (1951), págs. 1-15.
G. H. v. WRIGHT, *Norm and Action* (A Logical Enquiry). Londres, Routledge and Kegan Paul, 1963. V. cast. de P. G. Ferrero: *Norma y acción* (Una investigación lógica). Madrid, Editorial Tecnos, 1970.

G. H. v. WRIGHT, «A New System of Deontic Logic». Recogido en R. Hilpinen (ed.), cit., págs. 105-120.

En línea de esta extensión del análisis formal a discursos no apofánticos tenemos asimismo las tres disciplinas siguientes:

Lógica de los mandatos, a la que cabría caracterizar como lógica de los enunciados imperativos. Véase, por ejemplo:

N. RESCHER, *The Logic of Commands*. Londres, Routledge and Kegan Paul (N. Y., Dover Publications), 1966.

La lógica de la preferencia y la elección, a cuyo cargo correría el estudio de las relaciones de inferencia entre enunciados llamados *estimativos*. Véase, por ejemplo:

G. H. v. WRIGHT, *The Logic of Preference*. Edimburgo, Edimburgo University Press, 1963. V. cast. de R. J. Vernengo en Buenos Aires, Eudeba, 1967.

La lógica erotética, es decir, la lógica de los enunciados interrogativos, o, si se prefiere, de las relaciones entre preguntas y respuestas (o también entre las preguntas y sus presuposiciones):

D. HARRAH, *Communication: A Logical Model*. Cambridge, Mass., The M. I. T. Press, 1963.

Mencionemos una última disciplina: *La lógica cronológica*. Estrechamente ligada a la lógica modal, esta «lógica del tiempo», como también se la ha llamado, surge del reconocimiento tanto de la existencia de esquemas de inferencia específicamente temporales, como de la importancia del factor tiempo —del tiempo de los verbos que aparecen en los enunciados que componen un razonamiento, por ejemplo— en la validez de una inferencia. Véase, por ejemplo:

J. L. GARDIES, *La logique du temps*. París, PUF., 1975.

Es preciso señalar que, pese a lo que pudiera inducir a pensar el hecho de que las hayamos ido mencionando por separado, muchas de estas lógicas se solapan y entrecruzan. No es imposible que algunas de ellas lleguen a integrarse en un único sistema, o que se combinen para formar sistemas mixtos: de hecho, existen ya, por ejemplo, lógicas modales polivalentes.

He aquí, pues, algunas de las vías por las que discurre actualmente la investigación en lógica formal.

Aun siendo nuestra lista, como ya anticipamos, incompleta, no lo es tanto si se tiene en cuenta la necesidad de distinguir entre extensiones de la teoría lógica y extensiones de la aplicación de la teoría lógica. Hoy,

en efecto, se usan a menudo expresiones que responden al esquema «la lógica de...». En muchos casos, sin embargo, ello no designa sino la aplicación de los instrumentos de análisis formal a un determinado campo. En este sentido, y puesto que, como hemos dicho ya, las reglas de la lógica son universalmente aplicables, aplicables con mayor o menor intensidad a todo razonamiento, es obvio que podría haber una «lógica de...» por cada sector del conocimiento suficientemente perfilado. Pero una cosa es hablar, por ejemplo, de «la lógica del descubrimiento científico» y otra hablar de «lógica deóntica». En el primer caso, estamos refiriéndonos a la aplicación peculiar de la lógica a un determinado ámbito. En el segundo, estamos aludiendo a una teoría lógica, a un desarrollo del *corpus* de esta disciplina.

Ahora bien: si es preciso guardarse de confundir los distintos cálculos lógicos con las diversas aplicaciones de la lógica, es también necesario reconocer la estrecha relación existente entre una y otra cosa, entre necesidades de aplicación de la lógica formal y conveniencias de elaboración de lógicas no clásicas. Es evidente que no se trata de dos procesos separados: la aplicación del análisis formal a una determinada materia puede revelar —y de hecho ha revelado en multitud de ocasiones, y sigue revelando— insuficiencias de la lógica en su actual estado, y ha constituido, por tanto, un estímulo para su despliegue —para su ampliación, para su afinamiento— en una u otra dirección.

Por ejemplo, como es bien sabido, la filosofía intuicionista de la matemática constituyó una respuesta a la crisis de fundamentos de esa disciplina. Los intuicionistas hablaron de una «lógica matemática» en el sentido de una sistematización *a posteriori* de las reglas del razonamiento efectivamente empleadas por el matemático en sus construcciones. Sería, pues, una *lógica de la matemática*, un registro de las reglas admitidas como válidas en esta ciencia. Ahora bien: en la medida en que el intuicionismo supone una contracción astringente de la matemática, la *lógica intuicionista* será asimismo una lógica más restrictiva que la lógica clásica. Así, por ejemplo, como el intuicionismo no admite que en matemática todo enunciado haya de ser o bien verdadero o bien falso (sin por ello, dicho sea de paso, admitir la posibilidad de valores intermedios), la lógica intuicionista no admitirá el principio de bivalencia. Otras peculiaridades de esta lógica se refieren a sus concepciones de la negación y de la existencia (es decir, del cuantificador existencial). Así pues, en resumidas cuentas, la lógica intuicionista es una restricción de la lógica clásica en el campo de la matemática.

Pero aunque esto era así en el intuicionismo tradicional, es decir, aunque autores como Brower pretendían sustituir la lógica clásica por la lógica intuicionista tan sólo en el campo de las entidades matemáticas, no faltan quienes más recientemente han propuesto llevar a cabo esa sustitución en todos los campos, extrapolando las exigencias intuicionistas iniciales al todo del razonamiento humano. Dummett, por ejemplo,

De hecho, hoy en día la concepción intuicionista de la lógica desempeña, en cualquier caso y como mínimo, un papel de sobre-exigencia, de desafío. Puesto que, como hemos dicho, sus criterios son más estrictos de lo normal, el atenerse a ellos o el simple tenerlos presentes en la construcción de cálculos o en el diseño de demostraciones supone someter a la teoría de la argumentación humana a una prueba cuya severidad es un acicate del rigor.

Sobre lógica intuicionista véase, por ejemplo:

A. HEYTING, *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1956; 3.ª ed., 1971. *Introducción al intuicionismo*. V. c. de V. S. de Zavala. Madrid, Ed. Tecnos, 1976.

M. DUMMETT, «Truth». *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 59 (1958-9), págs. 141 y ss. Reimpr. en P. F. Strawson (ed.), *Philosophical Logic*. Oxford, Oxford University Press, 1967; págs. 49 y ss.

Lógica «normal» y lógica «desviada»

En otro lugar[362] hemos señalado la impropiedad del calificativo «no-clásicas» aplicado a estas lógicas que divergen, en uno o más rasgos, de la lógica que nos ha tenido ocupados a lo largo de todo este libro.

Para empezar, el término se resiente de la vaguedad que aqueja siempre a los términos negativos. Si a eso se añade que el propio término positivo, «(lógica) clásica», carece por completo de precisión, nos hallaremos ante una suma de confusiones.

No es fácil, sin embargo, encontrar una denominación que sustituya a ésta. La de «lógicas divergentes» no parece inadecuada. Tal vez tampoco fuera malo llamarlas «lógicas desviadas». Cierto que el término «desviado» tiene casi siempre connotaciones peyorativas, pero no hay por qué no sucumbir al encanto de la heterodoxia. Y, además, llamarles «desviadas» permite hablar, por contraste, de «lógica *normal*», y es éste un término que, en virtud de razones a las que aludiremos, quizá resulte en este contexto particularmente sugestivo.

En cualquier caso, al hablar de lógica polivalente, de lógica modal (alética), de lógica deóntica, nos movía únicamente el propósito de infundir en el lector una visión abierta y pluralista de la lógica. Porque es que, además, las que hemos mencionado no son las únicas lógicas divergentes. Sin necesidad de hablar de los restantes tipos de modalidades, podemos enriquecer el panorama de la lógica actual con la mención, por ejemplo, de la lógica combinatoria, «una rama de la lógica matemática que se interesa por los fundamentos últimos», cuyo objetivo es «analizar ciertas nociones de carácter tan básico que ordinariamente se toman por obvias».

[362] Véase nuestro artículo «Lógicas no clásicas» del *Diccionario de filosofía actual*, dirigido por M. A. Quintanilla. Salamanca, Ediciones Sígueme, 1975, así como nuestro artículo «La lógica formal hoy», *Revista de Occidente*, 7 (1976), págs. 89 y ss.

Esas nociones «constituyen, por así decirlo, una prelógica cuyo análisis no es en modo alguno trivial»[363]. La lógica no es, pues, sólo la lógica bivalente apofántica, a la que nos hemos entregado durante toda esta obra. Esa lógica es, hoy, la lógica «normal», adjetivo que, a fuerza de ser usado con matiz positivo, ha acabado por adquirir connotaciones desfavorables.

Quisiéramos, para terminar, aludir a un problema que nos parece el fundamental —el fundamental problema *interno*— que la lógica tiene hoy planteado. Formulada muy en general, la cuestión quedaría encerrada en la siguiente pregunta: ¿Cuál es la relación de esas lógicas no clásicas con la lógica clásica?

Evidentemente, esa relación no es la misma en todos los casos. No es la misma la relación que con la lógica clásica mantienen, por ejemplo, la lógica intuicionista y la lógica deóntica.

Susan Haack[364] ha dividido las lógicas no clásicas en dos grandes grupos: lógicas *rivales* y lógicas *suplementarias*. A su vez, las lógicas rivales podrían serlo en sentido *global* o en sentido *local*. Lógicas rivales serían aquellas lógicas capaces, según parece, de reemplazar a la lógica clásica en todos los campos del análisis formal —lógicas en sentido global—, o bien sólo en ciertos campos de la actividad argumentativa —lógicas rivales en sentido *local* o parcial.

Ahora bien: en el párrafo anterior hemos mantenido —deliberadamente— una ambigüedad que en el texto de Haack no existe. Haack, en efecto, distingue entre lógicas que *se proponen* como rivales y lógicas que *se proponen* como suplementarias. Es decir, que su clasificación está pensada para agrupar las lógicas no clásicas *en función de los propósitos que guían a quienes las construyen*, y no —o no también— en función de la relación que realmente parecen guardar con la lógica clásica.

A veces la distinción es irrelevante. La lógica erotética, pongamos por caso, se presenta como una lógica suplementaria. Y eso es lo que es: un desarrollo de la lógica destinado a proporcionar un análisis formal de las relaciones de inferencia entre enunciados de un tipo muy determinado. Otro tanto cabe decir de la lógica deóntica, o de la lógica de los mandatos. Con respecto a la lógica modal alética, en cambio, no podríamos ser igualmente rotundos: se la entiende usualmente como una lógica suplementaria, pero habida cuenta, por una parte, de que no han faltado quienes han querido considerar los conceptos 'verdadero' y 'falso' como conceptos modales, y, por otra parte, de lo antes dicho acerca de la necesidad lógica, no sería imposible entenderla como una lógica

[363] Cfr. H. B. Curry y R. Feys: *Combinatory Logic*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1958. Versión castellana de M. Sacristán. Madrid, Editorial Tecnos, 1967, pág. 19. Un «mapa» de la lógica actual puede encontrarse en el artículo de N. Rescher, «Desarrollos y orientaciones recientes en lógica». Versión castellana en *Teorema* ,n.º 2 (1971), págs. 51-64.

[364] *Deviant Logic*. Cambridge, Cambridge University Press, 1974.

rival en sentido global. Y, ¿qué decir de las lógicas polivalentes? A primera vista, parecen lógicas rivales, enmendantes de la totalidad de la lógica clásica, y en muchas ocasiones han sido propuestas como lógicas sustitutivas de ésta, a la que englobarían como caso límite (de modo similar a como, en teoría política, el bipardismo sería el caso límite del pluralismo). Pero he aquí que ciertos sistemas trivalentes —como, por ejemplo, el primero de los que Łukasiewicz diseñó— resultan, a la postre, subsistemas del cálculo bivalente ordinario; o bien que, por poner otro caso, se ha podido demostrar la posibilidad de reducir la lógica de los enunciados vagos o borrosos a una lógica bivalente de ciertas características. La dificultad estriba en que no sólo no está clara la posible solución de la cuestión, sino ni siquiera el modo adecuado de planteamiento de ésta. Cuando esto ocurre, dicho sea de paso, suele decirse que estamos ante un problema filosófico.

Todo ello plantea de nuevo una cuestión que pudiera parecer puramente verbal, pero que no lo es (entre otras razones porque apenas existen cuestiones que sean puramente verbales, salvo ciertos problemas internos a la lingüística). Se trata de lo siguiente: ¿cómo llamar a la lógica clásica? Hasta ahora mismo hemos venido llamándola así, pero es obvio que hay un problema de denominación que no constituye sino la otra cara del problema que acabamos de mentar. Dicho con otras palabras: la cuestión del *status* de las lógicas no clásicas respecto a la lógica clásica plantea, recíprocamente, la cuestión de la naturaleza de ésta, y, subsiguientemente, el de su mejor calificación. Por relación a las lógicas suplementarias tal vez no sería malo llamarla «lógica central», de la que esas lógicas serían desarrollos laterales complementarios. En otros casos bastaría con denominarla «lógica del discurso apofántico», en la medida en que muchas de esas lógicas suplementarias no son, como hemos visto, sino extensiones del análisis formal a otros discursos.

En cualquier caso, hay dos denominaciones que, a la vista del presente estado de la cuestión, no nos parecen inapropiadas: *«lógica normal»* y *«lógica matriz»*.

La conveniencia de llamarla «lógica normal» sería resultado de una adaptación —un tanto libre, sin duda—, al caso de la lógica, de las concepciones de T. S. Kuhn en torno a los mecanismo de desarrollo de las ciencias a lo largo de su historia*. Lógica normal querría decir aquí lógica aceptada como paradigma, como ejemplo de instrumento de análisis formal del que habría que partir bien sea para refinarlo, bien para desbordarlo asumiéndolo como manifestación no totalmente lograda del desarrollo de dicho análisis. Las lógicas rivales en sentido

* Un análisis de la aplicabilidad de las ideas de Kuhn al desarrollo de la lógica puede verse en A. Deaño, «Ciencias formales y revoluciones científicas: el caso de la lógica», en Varios, *Filosofía de la ciencia y metodología. Cuadernos Económicos de Información Comercial Española*, 3-4, 1977, pp. 46-71.

global se aparecerían, entonces, como intentos de absorber a la lógica central y a las lógicas suplementarias en un paradigma más alto de análisis formal.

La calificación de «lógica matriz», fruto de una implantación, en otro clima, de las concepciones de los Bourbaki acerca de la matemática, abundaría en esto mismo. La lógica clásica sería lógica matriz no sólo por el hecho obvio de que haya sido en su seno donde haya tenido lugar la gestación de esas otras lógicas, sino, sobre todo, porque ellas recogen su herencia —sus pretensiones analíticas— para hacer con ellas más y mejores cosas.

En el fondo, el problema es —como lo son todos los problemas realmente importantes— un problema de opciones, es decir, un problema filosófico: el problema del carácter *trascendental* —en el sentido *kantiano*— de la lógica. ¿Qué es la lógica? ¿Un puro instrumento de análisis, que podemos perfeccionar o incluso reemplazar enteramente en virtud de simples razones de eficacia, en función de criterios puramente pragmático, o bien, más allá de eso, la expresión de las condiciones formales del ejercicio de todo discurso, la mostración de la estructura y de los cauces, de las posibilidades y de los límites de nuestro conocimiento de las cosas? Si la lógica es sobre todo esto último, en lógica no caben más que afinamientos, no revoluciones. Si la lógica es —para decirlo parodiando una frase que a todos sonará— *nuestro destino en lo formal*, únicamente nos queda indagar en sus detalles, limpiarla, fijarla y darle esplendor, siendo vana pretensión la de cambiarla, la de hurtarse a ella.

Pero no es en esta sección donde vamos a desplegar ese problema*, un problema que toca fondo en las honduras filosóficas, un problema que no es sino el problema de la razón.

4. Lógica, lingüística y psicología

En esa primera revolución, que, a través de autores como Boole o Frege, izó la lógica hasta la categoría de ciencia estricta haciéndole, por ende, cobrar conciencia del sentido de su historia milenaria, tuvo mucho que ver la matemática: en Boole, como ejemplo; en Frege, como problema.

Quizá la lingüística y la psicología estén, hoy, cumpliendo con respecto a la lógica el papel que la matemática tuvo un día. De una parte, el surgimiento de una lingüística científica —de una lingüística (la lingüística generativo-transformatoria) que parece haber encontrado para la lingüística «el seguro camino de la ciencia», que parece haberse decidido a sustituir la recolección de casos por la formulación de hipótesis, la labor

* Véase sobre este punto A. Deaño, *Las concepciones de la lógica*, Madrid, Taurus, en prensa.

del taxonomista por la del teórico[365]—, y de otra parte, el progreso de una psicología del razonamiento consciente de la necesidad de dar preferencia al estudio de los procesos de razonamiento sobre el de los resultados; resuelta a abandonar el estudio sesudamente tosco del comportamiento de las ratas —propagadoras de una suerte de peste psicológica— para concentrarse en la descripción y explicación científica de ese distinguido tipo de conducta humana que consiste en razonar; convencida de que hacer ciencia no es hacer positivismo de pacotilla, sino arriesgarse con la imaginación y —eso sí— someter luego a contrastación —gobernada por la lógica formal— los frutos de esa creatividad. Todo ello, decimos, puede hacer que entre la lógica, por una parte, y, por otra, la lingüística y la psicología, se entable un ciclo de alimentación que sólo redunde en beneficio de esas tres ciencias. Ese ciclo —como enseña su etimología— es un círculo. Aplicando la lógica —que es lo que, entre otras cosas, hace toda ciencia que merezca tal nombre—, la lingüística y la psicología están procediendo a poner lúcidamente de relieve las presentes insuficiencias de esa ciencia que utilizan como instrumento.

Por lo que respecta a las relaciones de la lógica y la psicología, tradicionalmente se ha considerado nuestra ciencia como la teoría de las leyes del pensamiento. Constituye esto una interpretación psicologista muchas veces criticada y hoy totalmente abandonada. Pero que no se pueda ser psicologista en lógica no quiere decir que la lógica no guarde relación alguna con la psicología: hay una relación estrecha entre ambas ciencias, y de ella se benefician una y otra.

Tal vez sea Jean Piaget quien con mayor profundidad y extensión ha elaborado la conexión entre estas dos disciplinas. Salvaguardando las diferencias que existen entre una ciencia formal como la lógica y una ciencia empírica como la psicología, cuidando en todo instante de mantener separadas las cuestiones de validez de las cuestiones de hecho, en esas condiciones —o con esas precauciones— cabe abonar la colaboración de lógica y psicología. A la psicología —y, señaladamente, a la llamada «psicología cognitiva», aunque sin olvidar otros apartados de esta disciplina— le es útil la lógica no sólo como instrumento de formalización, sino sobre todo como provisora de, como dice Piaget, «modelos abstractos de las operaciones reales de pensamiento», modelos que forjaría una disciplina —intermedia entre la lógica pura y la psicología al modo como la física matemática es intermedia entre la matemática pura y la física experimental— que Piaget llama «lógica operatoria»[366]. Modelos

[365] En el sentido, por supuesto, que hoy se da a este término en metodología de la ciencia.

[366] Cfr., «La lógica axiomática o pura, la lógica operatoria o psicológica y las realidades a las que corresponden», en J. Piaget, *Lógica y psicología*, Madrid, Alianza, en prensa.

abstractos de las operaciones *reales*; repárese en cómo esos dos adjetivos mantienen la independencia entre una ciencia y otra (o, en rigor, entre la aplicación de una ciencia —pues la lógica operatoria es lógica aplicada— y la ciencia a la que se aplica). No se trata de que la lógica domine la psicología, de que el pensamiento empíricamente considerado sea —o haya de ser— «el espejo de la lógica». Se trata de que la lógica —elaborada, a fin de cuentas, por seres humanos que, en dicha elaboración, echan mano de lo que luego llamaremos su propia «competencia lógica»— puede muy bien servir de orientación *de la investigación psicológica* sobre el razonamiento de los sujetos —y no como orientación de la conducta raciocinante de los sujetos mismos. La lógica puede forjar para el psicólogo modelos, estructuras ideales que sirvan de marco para la organización de la recogida de datos experimentales. La psicología de Piaget ofrece abundantes ejemplos de este uso de la lógica que no constituye ni una recaída en el psicologismo, como han pensado algunos críticos de este autor, ni tampoco —como han creído la mayoría de ellos— una nueva forma de logicismo. Lógica y psicología se mantienen separadas, pero próximas y en colaboración.

Por otra parte, también la lógica —y es aquí esto lo que sobre todo nos interesa— se beneficia del contacto con la psicología. De la psicología obtiene la lógica información sobre su implantación en el psiquismo; sobre los mecanismos psíquicos que hacen posible la comprensión y el uso de la lógica, y sobre los estadios de desarrollo de las nociones lógicas en el sujeto. Naturalmente, no se trata de utilizar la psicología para probar o para refutar leyes lógicas: así, por el hecho de que buen número de sujetos incurran en la falacia de afirmación de consecuente, no pasará ésta a ser una verdad de la lógica; y por muy poco «naturales» que les parezcan a los sujetos ciertas verdades lógicas, ese no será motivo suficiente para excluirlas de nuestra ciencia. El papel de la psicología por respecto a la lógica no es ni confirmatorio ni refutatorio: su papel es, como hemos dicho antes, esclarecedor; esclarecedor de las circunstancias que acompañan a la lógica en el psiquismo; y también estimulante, en la medida en que las investigaciones sobre lo que Piaget ha llamado «la lógica del sujeto» —es decir, el sistema de reglas a las que el sujeto, a juzgar por los datos de las pruebas psicológicas, se atiene— pueden sugerir la posibilidad o la necesidad de elaborar sistemas lógicos «no-clásicos» en los que esa lógica natural quede reconstruida con mayor fidelidad. Así, se ha sugerido por algún autor que el sujeto razona muchas veces de acuerdo con lo que parece ser una lógica polivalente modal, lo cual parece ser un buen motivo para ensayar cálculos lógicos de ese tipo[367].

[367] Cfr., L. Apostel, «Algunos problemas sobre las relaciones entre la psicogénesis y las lógicas no clásicas». En J. Delval (Comp.), *Investigaciones sobre lógica y psicología*, Madrid, Alianza Ed., 1977, pp. 89-108.

Ciertamente, un lógico puede siempre desdeñar las investigaciones psicológicas sobre el origen (sobre la ontogénesis y sobre la filogénesis) de la lógica a base de decir que lo que a él lo ocupa es la teoría lógica como tal, tal como puede ser desarrollada y comprendida por un adulto. Las indagaciones sobre la ontogénesis y la filogénesis de las nociones lógicas pueden resultar altamente ilustrativas, pero la investigación en lógica pura puede muy bien pasarse sin ellas. La lógica pura no «entiende» de génesis, sino de estructuras. A la lógica pura no le interesa el «contexto de descubrimiento» de su ciencia, sino su «contexto de justificación» —para emplear un tanto libremente una pareja de conceptos de la epistemología clásica. La lógica pura es un *lenguaje* formalizado, o un sistema de *lenguajes* formalizados, y, en rigor, nada tiene que ver con ello el que los lógicos hayan sido, de niños, *infantes*.

Y no le faltaría razón a un lógico puro que así hablara. Por su boca, además, hablaría la ya vieja suspicacia de los lógicos, fruto del secular entrometimiento de la psicología en sus asuntos, hacia todo lo que venga de esta ciencia (suspicacia, por lo demás, paralela a la que, también con motivo, muestran los psicólogos hacia la lógica). En cualquier caso, y pese a todo ello, no parece pernicioso aconsejar al lógico que preste atención a los resultados de la psicología. Si sabe hacer oídos sordos a las asechanzas psicologistas, encontrará en esos datos, como antes decíamos, estímulos y sugerencias para su purísima labor.

Piaget se ha ocupado en muchos lugares de la relación entre lógica y psicología y de las aplicaciones de aquélla a ésta. Varios de sus trabajos aparecen reunidos en:

PIAGET, J.: *Lógica y psicología.* Compilación de A. Deaño y J. del Val. Barcelona, A. Redondo ed., 1972. Nueva ed. Madrid, Alianza ed., en prensa.

Piaget también ha escrito una lógica desde la perspectiva del sujeto psicológico:

PIAGET, J.: *Traité de Logique. Essai de logistique opératoire.* Paris, A. Colin, 1949. Nueva ed. a cargo de J. B. Grize con el título: *Essai de logique opératoire.* Paris, Dunod, 1972.

Sobre el desarrollo de las nociones lógicas en el niño, los trabajos más importantes de este autor, escritos en colaboración con Barbel Inhelder, son:

INHELDER, B. y PIAGET, J.: *La genèse des structures logiques élémentaires. Classifications et seriations.* Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, 1959. V. cast. de M. Riani: *La génesis de las estructuras lógicas elementales.* Buenos Aires, Guadalupe, 1967.
INHELDER, B. y PIAGET, J.: *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent.* Paris, P. U. F., 1955. V. cast. de M. T. Cevasco: *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires, Paidós, 1972.

Diversos estudios sobre las relaciones de la lógica y la psicología y la aplicación de la lógica al estudio del razonamiento se recogen en:

DELVAL, J. (Comp.): *Investigación sobre lógica y psicología.* Madrid, Alianza Ed., 1977.

Investigaciones psicológicas sobre el razonamiento y diversos problemas lógicos se encuentran en:

FALMAGNE, R. J. (ed.): *Reasoning: Representation and process in children and adults.* Hillsdale, N. J., Lawrence Erlbaum Associates, 1975.
WASON, P. C. y JOHNSON-LAIRD, P. N.: *Psychology of reasoning. Structure and content.* Londres, Batsford, 1972. V. cast. de J. Delval, Madrid, Debate, en prensa.

Acaso esos lógicos acendrados se muestren menos adustos si, en vez de proponerles la utilización en lógica de ciertos resultados o de ciertas inspiraciones de la psicología, se les sugiere la posibilidad de adaptar a la lógica ciertas nociones tomadas de la lingüística generativo-transformatoria.

Evidentemente, no podemos —ni tenemos por qué dar aquí cuenta detallada de las relaciones actuales entre lógica y lingüística. A la vista del océano bibliográfico en que, para hacerlo, habríamos de sumergirnos, la sola idea de emprender una tarea semejante produce vértigo.

Al hablar, hace un instante, de las relaciones entre lógica y psicología, organizábamos nuestra exposición dividiéndola en dos partes fundamentales: utilidad de la lógica para la psicología, y utilidad de la psicología para la lógica. Y dábamos a esta última parte, por razones obvias, una mayor importancia. Otro tanto haremos en este caso, si bien este caso es notablemente más complejo. Por ello, y con objeto de no extendernos demasiado, estableceremos la comparación en términos muy generales, sin descender a la consideración de cuestiones de detalle.

¿Utilidad de la lingüística para la lógica? Podríamos empezar intentando adaptar a nuestra ciencia una de las nociones fundamentales —si no la fundamental, pese a lo discutida que está siendo— de la «filosofía» de la lingüística generativo-transformatoria, uno de los presupuestos básicos de esta ciencia. Se trata de la noción de «*competencia* lingüística» (contrapuesta a la de *actuación*).

La lingüística, tal como Chomsky la concibe, opera con «una distinción fundamental entre *competencia* (el conocimiento que el hablante-oyente tiene de su lengua) y *actuación* (el uso real de la lengua en situaciones concretas)»[368].

¿No es ésta una distinción que clama por que se la adapte a la lógica? Dice Chomsky: «Una gramática de una lengua pretende ser una

[368] *Aspects of the Theory of Syntax.* Cambridge, Mass., The M. I. T. Press, 1965. *Aspectos de la teoría de la sintaxis.* V. cast. de C. P. Otero. Madrid, Aguilar, 1970, págs. 5-6.

descripción de la competencia intrínseca del hablante-oyente ideal»[369]. Dice también: «La gramática de una lengua concreta debe ser suplementada por una gramática unversal que explique el aspecto creativo del uso lingüístico y exprese las profundas regularidades que, por ser universales, no aparecen en la gramática propiamente dicha»[370]. Y dice, finalmente: «Para evitar lo que hasta ahora ha sido una tergiversación continua, quizá merezca la pena reiterar que una gramática generativa no es un *modelo* del hablante o del oyente, sino que intenta caracterizar en los términos más neutrales posibles el conocimiento de la lengua por un hablante-oyente»[371]. ¿Acaso no resulta perfectamente natural intentar implantar nociones paralelas a éstas en la lógica? Intentémoslo.

Y al intentarlo, lo primero con lo que nos encontramos es con que esa implantación no tendría propiamente su lugar en la lógica formal, en la teoría lógica como tal, sino más bien en el terreno de la «lógica del sujeto», es decir, en lo que Piaget llamaba la «lógica operatoria». En efecto: *competencia lógica* sería el conocimiento implícito que el sujeto razonante tiene de las reglas de la lógica (y que se «actualiza», como dicen los psicólogos, en ciertas situaciones experimentales, es decir, cuando el sujeto se enfrenta con ciertas pruebas); *actuación lógica* sería el uso efectivo que el sujeto hace de la lógica en situaciones concretas. Ninguna de las dos nociones pertenecería, pues, a la lógica pura, sino a la teoría del conocimiento que el sujeto tiene de las reglas de la lógica. En este sentido, pueden establecerse comparaciones entre el tipo de conocimiento que se tiene de las reglas del lenguaje y el tipo de conocimiento que se tiene de las reglas de la lógica. Así, por ejemplo, nos dice José Hierro que «en todo comportamiento sujeto a reglas hay un conocimiento de que (un saber-que) ciertos objetos (situaciones, acciones, personas, cosas, etc.) satisfacen la valoración que ese sistema de reglas comporta, y de que otros no la satisfacen. Dicho conocimiento se manifiesta en el propio comportamiento valorativo, que en el caso del lenguaje consistirá en aceptar unas oraciones y en rechazar otras. Y esto no exige ni poder formular las reglas que se aplican ni ser conscientes de su aplicación». Hierro piensa que con *las reglas de la lógica* ocurre algo semejante: «Hacer razonamientos válidos y distinguirlos de los razonamientos inválidos es algo que no requiere la capacidad para formular las reglas lógicas pertinentes [...]. Ello no requiere un conocimiento reflexivo o explícito de dichas reglas»[372].

¿No sería, entonces, incurrir en psicologismo decir que la lógica pretende ser una descripción de la competencia intrínseca del sujeto razonante ideal[373]? ¿No sería mejor decir que esa tarea correspondería a una

[369] *Op. cit.*, pág. 6.
[370] *Op. cit.*, pág. 8.
[371] *Op. cit.*, pág. 10.
[372] J. Hierro, *La teoría de las ideas innatas en Chomsky*. Barcelona, Labor, 1976, pág. 30.
[373] Hemos parafraseado una afirmación de Chomsky en *op. cit.*, pág. 6.

especie de lógica aplicada, que proporcionaría *un modelo* de la competencia lógica del sujeto razonante ideal?

Ahora bien: Chomsky, como hemos visto hace un momento, niega que la gramática generativa sea un *modelo* del hablante o del oyente. La gramática generativa, recordemos, «intenta caracterizar en los términos más neutrales posibles el conocimiento de la lengua que proporciona la base para el uso real de la lengua por un hablante-oyente». No nos es fácil entender lo que Chomsky quiere decir con esta contraposición, pero, en cualquier caso, ello no cambia sustancialmente las cosas, a nuestro juicio. Si adaptando el concepto de competencia lingüística a la lógica hablamos de «competencia de un sujeto razonante o raciocinante ideal», con ello no estamos elaborando una noción lógica, ni tampoco una noción que sirva para esclaracer la naturaleza de la lógica, sino una noción que en todo caso esclarecería *nuestro conocimiento de la lógica*, el conocimiento de la lógica que proporciona la base para la aplicación real de la lógica por un sujeto.

Ahora bien: ¿no cabría pensar que ese sujeto razonante ideal es el sujeto trascendental, y que, por tanto, al describir la competencia lógica intrínseca de ese sujeto razonante ideal no estamos sino describiendo las reglas de la lógica en cuanto tal? Aunque nosotros, sin duda un tanto precipitadamente, hemos llegado, en otros escritos, a dar eso por sentado —o, mejor dicho, a considerar ese modo de hablar como una metáfora admisble—, en este instante la cosa nos parece bastante menos clara. Entendida la afirmación en sentido literal, resulta cuando menos excesivamente osada. Entendida como una metáfora, parece encerrar un claro riesgo de psicologismo.

¿Qué decir, por otra parte, de una comparación que nosotros en alguna ocasión hemos establecido[374] entre lógica y lingüística permitiéndonos caracterizar a la primera como *teoría generativo-transformatoria del razonamiento?* Ciertamente, nosotros nos limitábamos a presentar esa comparación como un modo aproximado de dar una idea del funcionamiento —más que de la naturaleza— de la lógica. Con todo, quizá convenga detenerse un momento en la consideración de la pertinencia de esa imagen. Como nos ha hecho ver Víctor Sánchez de Zavala[375], la comparación habría en todo caso que invertirla, en el sentido de decir que la lingüística es una formalización del lenguaje. Dicho más claramente: siendo la lingüística generativo-transformatoria deudora de la lógica —por estar aplicando al estudio del lenguaje natural procedimientos e ideas que la lógica ha creado para los lenguajes formalizados—, siendo la aplicación de la lógica a la lingüística lo que hace que ésta pueda ser una lingüística generativo-transformatoria, no deja de ser una ironía

[374] A. Deaño, artículo «Lógica formal» en M. A. Quintanilla (ed.), *Diccionario de filosofía contemporánea*. Salamanca, Ed. Sigueme, 1976, págs. 261 y ss., pág. 267.
[375] Comunicación personal.

el intento de regalar a la lógica lo que siempre ha sido suyo. Por supuesto que la lógica es una teoría generativo-transformatoria del razonamiento; tanto que, gracias a la lógica, los lingüistas han podido emprender la tarea de elaborar una teoría generativo-transformatoria del lenguaje. En pocas palabras: hemos invertido el orden en que la comparación debía ser hecha. Así pues, la caracterización de la lógica como teoría generativo-transformatoria del razonamiento es, en un sentido —y si se perdona esa chusca inversión del orden que nosotros cometimos al hacerla—, perfectamente obvia. Lo malo es que no parece ser de extremada utilidad. A lo sumo podría tener un valor pedagógico: como antes apuntábamos, podría servir para dar a unos alumnos una idea de lo que la lógica *hace*, más que de lo que la lógica es.

Antes de pasar adelante, hagamos un breve balance de lo que hasta ahora llevamos dicho acerca de las relaciones entre lógica y lingüística. Por el momento, nos hemos limitado a ensayar la aplicación a la lógica de ciertas nociones —generalísimas, como no podía ser menos— de la lingüística (o, por mejor decir, de la metalingüística, e incluso, en algún caso, de la filosofía de la lingüística). El resultado ha sido más bien triste: en un caso, veíamos que la comparación, llevada con todo rigor, conducía al repetidas veces exorcizado psicologismo; en el otro caso, la comparación —mal llevada— resultaba obvia pero nada fructífera. Es natural: la lingüística —que no en vano constituye para Chomsky un capítulo de la psicología— es uno de los campos donde la aplicación de la lógica resulta más notoria. Y resulta que nosotros hemos estado intentando explicar la naturaleza de la lógica *pura* utilizando conceptos que sólo tienen sentido si se presupone que la lógica ha sido *aplicada*. Aplicamos la lógica a la lingüística —o a la psicología—, lo cual supone que disponemos de una lógica pura que poder aplicar, y luego pretendemos utilizar nociones que resultan de esa aplicación —nociones, por ejemplo, derivadas del estudio del conocimiento que los sujetos tienen de esa lógica que aplican, o nociones que pertenecen a la lógica aplicada precisamente porque hemos aplicado la lógica pura— en el esclarecimiento de aquello que hace esa aplicación posible. No es de extrañar que de ese proceso sólo salgan modos de hablar útiles —si se los utiliza con precaución— para dar una idea del funcionamiento de la lógica, pero nunca instrumentos para explicar la naturaleza de ésta. Por lo demás, ya se ha visto que no sólo hemos mantenido la comparación entre una y otra ciencia en un plano sumamente general, sino que además hemos utilizado únicamente referencias a la lingüística generativo-transformatoria «clásica», a la lingüística de hace una década, siendo así que, al ritmo que va, para la lingüística una década es un siglo.

No cabe, sin embargo, terminar el tratamiento de las relaciones entre lógica y lingüística de una manera tan desconsoladora. Vamos, por ello, a plantearlas en otra forma, y así se verá que de la lingüística —de su presente estado y del sentido que parece tener su evolución— cabe extraer utilísimas enseñanzas para la lógica misma, para la comprensión de la naturaleza de la lógica y de lo lógico en cuanto tales.

Al menos durante un tiempo, ha sido un lugar común entre los filósofos del lenguaje ordinario la contraposición entre la simplicidad y el rigor del lenguaje artificial de la lógica, y la complejidad, la vaguedad, la «inexactitud» del lenguaje cotidiano. Una cosa es el lenguaje formalizado de la lógica, gobernado por reglas explícitas y precisas, y otra muy distinta el «lenguaje de la vida».

En eso, en esa contraposición, todos los lógicos formales estarían completamente de acuerdo: no sabemos de ninguno que haya defendido la idea de que la lógica sea o pueda llegar a ser una reproducción fiel, punto por punto, del lenguaje ordinario (a lo más, alguno ha querido ver en ella *la esencia* de éste). En lo que ya pocos lógicos estarían de acuerdo es en las consecuencias que algunos filósofos del lenguaje ordinario han querido extraer de esa contraposición entre la nitidez y exactitud del lenguaje lógico y lo proceloso del lenguaje ordinario.

Strawson, por ejemplo, cree que la idea fundamental que hay que retener, al cabo del examen comparativo de la lógica formal y la lógica del lenguaje ordinario que constituye el nudo de su *Introduction to Logical Theory*, es la de que «las simples relaciones deductivas no son el único tipo de relaciones que hemos de tomar en consideración si queremos entender las funciones lógicas del lenguaje». Las funciones del lenguaje que interesan a la lógica formal son tan sólo un grupo muy reducido de las incontables que aquel puede desempeñar. Por otra parte, los instrumentos de análisis del lenguaje que la lógica formal nos proporciona no son ni mucho menos los únicos aperos analíticos de que disponemos. En los resultados de nuestro estudio del lenguaje ordinario no encontraremos ciertamente «ese carácter de elegancia y sistema que ostentan las construcciones de la lógica formal. También es cierto que la lógica del lenguaje ordinario aporta un campo de estudio intelectual no superado en riqueza, complejidad y poder de atracción»[376].

Ahora bien, la tesis de Strawson podría entenderse —y así se ha entendido, como consecuencia de ciertas lecturas apresuradas— como si significara el definitivo divorcio, el divorcio por principio entre la lógica formal y el análisis lógico cabal del lenguaje ordinario, como si la primera no pudiera ni debiera intentar la reconstrucción cada vez más fiel y detallada del lenguaje ordinario en sus aspectos lógicos, como si el lenguaje ordinario debiera ser abandonado para siempre por la lógica.

La lingüística actual, los crecientes desarrollos de la lingüística, nos ofrecen la posibilidad de forjar argumentos en contra de esta manera de ver las cosas. Y no sólo los desarrollos actuales de la lingüística, sino también los desarrollos actuales de la lógica formal misma, y, señalada-

[376] Strawson, P. F. *Introduction to logical theory*. Londres, Methuen, 1952, págs. 231-232.

mente, la proliferación de las lógicas llamadas «no-clásicas». Estas ofrecen la posibilidad de formalizar aspectos o usos del lenguaje que antes parecían escapar a la lógica, mostrando la capacidad que la lógica formal tiene de ir estando a la altura que la complejidad del lenguaje exige. El aprovechamiento que de esas lógicas están haciendo los lingüistas —es decir, los científicos *naturales* del lenguaje— es la mejor confirmación de su utilidad. Lejos de pensar que el lengueje ordinario, por su complejidad, exige estudios «informales», asistemáticos, en los que la lógica formal desempeñe a lo sumo un papel de ideal de precisión inalcanzable, los lingüistas actuales creen que, precisamente por su complejidad, el lenguaje ordinario demanda una *lógica formal*, una reconstrucción *formal* cada vez más refinada, como la que permiten las lógicas no clásicas.

Un ejemplo adecuado de este modo de ver las cosas nos lo proporciona el lingüista George Lakoff con su aplicación de las *fuzzy logics* al estudio de problemas de semántica del lenguaje natural. Lakoff[337] comienza reconociendo que «los conceptos del lenguaje natural tienen límites vagos y bordes borrosos», de tal forma que las oraciones del lenguaje natural no serán, con mucha frecuencia, ni verdaderas, ni falsas, ni carentes de sentido, sino más bien «verdaderas en cierta medida y falsas en cierta medida, verdaderas en ciertos respectos y falsas en otros respectos»[378]. Ahora bien: ¿lleva esto a Lakoff a la forma de desesperación consistente en decir que la lógica formal debe dejar el lenguaje ordinario por imposible, por no susceptible de formalización? En absoluto. Lo que Lakoff hace es buscar un sistema lógico en el que pueda llevarse a cabo esa formalización sin traicionar esos rasgos del lenguaje ordinario. Y lo encuentra en una adaptación de la *fuzzy set theory* de Lofti Zadeh, a base de la cual elabora una *fuzzy logic*, un sistema lógico capaz de analizar las relaciones de inferencia entre enunciados borrosos. Y así Lakoff nos dice cosas como las siguientes: «Hemos estado empleando una lógica polivalente (pues la fuzzy logic es, obviamente, una lógica polivalente) en un intento de proporcionar una explicación inicial de la borrosidad [*fuzziness*] del lenguaje natural. Las lógicas polivalentes han sido utilizadas también en un intento de explicar la noción de presuposición en un lenguaje natural. Parece natural preguntarse qué es lo que sucede si se combina la *fuzzy logic* con la *presupositional logic*». Afirmaciones como éstas dan idea del tipo de enfoque de la relación entre lógica formal y lenguaje natural que adoptan lingüistas como Lakoff. Enfoque que queda todavía más claro en afirmaciones como la siguiente: «El propósito de este examen de la *fuzzy logic* ha sido mostrado que no hay por qué

377 Cfr., como *locus classicum*, «Hedges: A Study in Meaning Criteria and the Logic of Fuzzy Concepts», en —entre otros lugares— D. Hocckney *et al.* (eds.), *Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics.* Dordrecht, Holland, D. Reidel Publishing Company, 1975, págs. 221 y ss.

378 *Op. cit.*, pág. 221.

echar las manos por alto en señal de desesperación cuando nos enfrentamos con los problemas de la vaguedad y la borrosidad. La borrosidad se puede estudiar seriamente dentro de la semántica formal»[379]. No hay que dar al lenguaje natural por imposible para la lógica formal; o, visto por el otro lado, no hay que pensar que el lenguaje natural puede escapar a la lógica. Más bien hay que ver en el lenguaje natural —y los lingüistas, es decir, los estudiosos profesionales de ese lenguaje, nos dan ejemplo— una fuente de estímulos y de exigencias para la lógica: de exigencias de construcción de cálculos más adaptados a las complejidades del lenguaje, y de estímulos e indicaciones para dicha construcción. Lejos quedan —o deberían quedar— los tiempos en que podía contraponerse el «constructivismo» al «naturalismo» en el estudio filosófico del lenguaje. Un cabal entendimiento de las posibilidades de la lógica y de las verdaderas intenciones de la lingüística permite a su vez entender eso que en tiempos fueron dos tendencias contrapuestas[380] como dos enfoques complementarios del problema de la relación entre lógica, lenguaje y filosofía.

Las ideas fundamentales acerca de la teoría de la lingüística generativo-transformatoria han sido expuestas en:

CHOMSKY, N.: *Syntactic Structures.* La Haya, Mouton, 1957. V. cast. de C. P. Otero: *Estructuras sintácticas.* México, Siglo XXI, 1974.

CHOMSKY, N.: *Aspects of the Theory of Syntax.* Cambridge, MIT Press, 1965. V. cast. de C. P. Otero: *Aspectos de la teoría de la sintaxis.* Madrid, Aguilar, 1970.

La obra de P. F. Strawson citada en el texto es:

STRAWSON, P. F.: *Introduction to Logical Theory.* Londres, Methuen, 1952. (La presunta versión castellana de esta obra no merece ser reseñada aquí.)

Entre los textos que ejemplifican la tesis de Strawson a la que se alude en este apartado podemos citar: el capítulo VIII del libro de:

RYLE, G.: *Dilemmas.* Cambridge, Cambridge University Press, 1954, págs. 111 y ss.

Como estudios de detalle cfr.:

STRAWSON, P. F.: «On Referring». *Mind* LIX, 1950, págs. 320 y ss. «Sobre el referir». V. cast. en T. M. Simpson (ed.), *Semántica filosófica.* Buenos Aires, Siglo XXI, págs. 57-86.

WARNOCK, G. J.: «Metaphysics in Logic». En *Essays in Conceptual Analysis* (A. Flew, ed.). Londres, MacMillan, 1956, págs. 75 y ss.

379 *Op. cit.*, págs. 231, 234.

380 Cfr., como textos clásicos, P. F. Strawson, «Carnap's Views on Constructed Systems versus Natural Languages in Analytical Philosophy», en P. A. Schilpp (ed.) *The Philosophy of Rudolf Carnap.* La Salle, Ill., Open Court Publishing Company, 1963, págs. 503 y ss. Y R. Carnap, «P. F. Strawson on Linguistic Naturalism», *ibid.*, págs. 933 y ss.

De las diferencias entre el lenguaje lógico y el lenguaje ordinario nos hemos ocupado también en:

DEAÑO, A.: *Lógica simbólica y lógica del lenguaje ordinario* (Resumen de tesis doctoral). Madrid, Facultad de Filosofía y Letras, 1972; «Filosofía, lenguaje y comunicación», en *Convivium*, 34 (1971/II), págs. 25 y ss.

Para las aplicaciones lingüísticas de la *fuzzy logic* puede verse, además del artículo de G. Lakoff citado en el texto:

LAKOFF, G.: «Fuzzy grammar and the competence/performance terminology game». En *Papers from the Ninth Regional Meeting* (C. Corum, T. Smith y A. Weiser (eds.)). Chicago: Chicago Linguistic Society, 1973, págs. 271-291.

ROSS, J.: «The category squish: Endstation Hauptwort». En *Papers from the Eight Regional Meeting*. Chicago, Chicago Linguistic Society, 1972, págs. 316-328.

Aplicando la lógica formal se adquiere la conciencia de su actual insuficiencia práctica, de su presente incompleción de hecho[381]. Pero —y esto es preciso subrayarlo— esa consciencia sólo se adquiere así: poniendo a prueba la lógica formal tras haberla recorrido, y no pretendiendo haber pasado *sobre* ella sin haber pasado antes a su través. Hay —y perdónesenos este tono solemne— algo muy serio. Algo que se llama reflexión filosófica. Pero la reflexión filosófica sólo es verdaderamente tal cuando se ejerce con entero rigor sobre algo que con entero rigor hemos hecho previamente nuestro.

Y ya que tantas veces nos hemos repetido a lo largo de esta obra —siempre en honor de quien pudiera leernos—, nos repetiremos una vez más. Volvamos a decir aquí lo que en otro lugar dijimos: *Violar la lógica es poseerla.*

5. Apéndice: Lógica formal y filosofía*

Con el fin de mitigar la desazón que me produce el ocuparme de temas tan abstractos en medio de problemas tan concretos como los que el país —y, por ende, la filosofía que en él se haga— tiene planteados,

[381] A distinguir, ocioso es advertirlo, de la incompleción que aqueja a la lógica «normal» como un todo. Recuérdese el Teorema de Gödel de 1931.

* Este apartado recoge la intervención del autor en la «Semana de Filosofía Contemporánea», celebrada en la Universidad de La Laguna en enero de 1976. Se publica aquí con la autorización del Departamento de Filosofía de dicha Universidad, que editará las actas de la semana bajo el título de *Varia filosofía (Encuentros de Filosofía de La Laguna)*. Se reproduce aquí esta conferencia porque su temática es aquélla con la que A. Deaño deseaba cerrar este libro. No es necesario decir que, si hubiese tenido ocasión de hacerlo, ni el estilo ni el tratamiento hubiesen sido los mismos.

comenzaré llamando en mi auxilio a un filósofo archiacadémico, John Austin, el cual, al término de las lecciones que luego compondrían su obra *Cómo hacer cosas con palabras* (título excelente, sobre todo para una filosofía más politizada que la suya), cree conveniente advertir: «En estas conferencias he estado haciendo dos cosas que realmente no me gustan. Ellas son:

1. Presentar un programa, esto es, decir qué es lo que hay que hacer, en lugar de hacerlo;
2. Dar conferencias»[1].

Por lo que hace a esto último, mis gustos coinciden enteramente con los de Austin. Y ello sobre todo —ya que no parece momento de entrar en una disquisición acerca de las ventajas del lenguaje escrito para la exposición de ciertos temas— por razones personales, derivadas de la escasa brillantez con que me produzco en este tipo de trances. En cualquier caso, sin embargo, la posibilidad de tomar contacto con vosotros que esta charla me ofrece compensa ampliamente el esfuerzo psíquico que desde hace unos instantes estoy realizando.

En lo que se refiere a la presentación de programas, estoy ampliamente disculpado, ya que entre los filósofos españoles contemporáneos parece existir una afición desmedida por ellos. En su carta de invitación a los participantes en estas sesiones, Javier Muguerza hace alusión a la paradoja de Tristram Shandy, la paradoja del autobiógrafo que emplea más de veinticuatro horas en relatar cada día de su vida. Tal vez llegue un tiempo en que quepa hablar de la aporía —agravada por la presente crisis de la industria papelera— del filósofo español, que consistiría en no poder escribir una página sin escribir antes otra que la justifique.

Y el caso es que yo también voy a presentar un programa. Naturalmente, podría acusárseme de incoherencia flagrante por hacer semejante cosa a renglón seguido de haber censurado la obsesión programática que en nosotros ha hecho presa. Si alguien, no obstante, levantara esa acusación contra mí, trataría de replicarle acudiendo a Lucio Anneo Séneca. Efectivamente: según creo recordar, Séneca, en algún lugar de su obra, respondiendo a cierta persona que le acusaba de no vivir de acuerdo con sus propias doctrinas, de no practicar lo que predicaba, exclama algo así como: «Bastante hago con decirlo, para encima tener que hacerlo». Adaptada a mi caso, la respuesta podría ser esta otra: «Bastante hago con decir que no hay que hacer ciertas cosas, para encima tener que dejar de hacerlas». En consecuencia —no formal—, aun persuadido de que es preciso dedicar al trabajo en filosofía al menos una parte del tiempo que se emplea en explicar cómo, por qué y para qué hay que filo-

[1] John L. Austin: *How to Do Things with Words*. Compilado por J. O. Urmson. Oxford, at the Clarendon Press, 1962. V. cast. —con el título de *Palabras y acciones*— de G. R. Carrió y E. A. Rabossi. Buenos Aires, Ed. Paidós, 1971, pág. 212.

sofar, me dispongo a describir mi programa, un modesto y *recoleto* programa de investigación filosófica. Lo haré brevemente, y, por tanto, esquemáticamente.

Pero no sin antes puntualizar un extremo, en la forma de glosa a un pasaje del *Teatro Crítico Universal*[2] de Benito Jerónimo Feijóo. Dice éste: «Más oportuno es, para ganar créditos, delirar con valentía que discurrir con perplejidad; porque la estimación que se debía a discretas dudas se ha hecho tributo de temerarias resoluciones». No es a mí a quien corresponde caracterizar mi intervención desde este punto de vista, pero quiero señalar ya ahora que, si lo que aquí presento es un programa, no lo es en el sentido de que en él se establezca qué es lo que se debe hacer, sino en el de que incluye algunas de las cosas que, entre otras muchas y más urgentes, podrían hacerse en filosofía. Y ello con el salutífero grado de perplejidad y discreta duda que constituye no sólo el principio del quehacer filosófico, sino también probablemente su fin.

Los términos de la relación

El título de esta charla es «Filosofía y lógica formal». Al elegir este tema he creído estar siguiendo puntualmente las indicaciones de Javier Muguerza, el cual espera que estas intervenciones sirvan de base «para problematizar las relaciones de la filosofía contemporánea con una serie de ámbitos culturales variopintos como las ciencias, artes, letras, etc.». En efecto: nuestro propósito es el de presentar, ya lo hemos dicho, un mapa, o, por mejor decir —dado el carácter esquemático, ya enunciado también, de esta exposición—, un croquis de las relaciones entre, de una parte, la actividad filosófica y, de otra parte, la lógica formal.

Precisamos —ya que, aun pudiendo parecer ocioso, no lo es— el sentido en el que vamos a emplear ambos nombres.

Vamos a hablar, por una parte, de *lógica formal*: de la lógica formal en su actual estado de desarrollo. Quiere ello decir al menos tres cosas:

1.ª Que no vamos a tomar en cuenta eso que para algunos es todavía hoy la lógica formal: la lógica de «concepto, juicio y raciocinio». No es que pensemos —ni mucho menos— que todas las reformas educativas realizadas en nuestro país en los últimos tiempos hayan supuesto una mejora en la enseñanza, pero sí cabe decir que del carácter trasnochado de esa pretendida «lógica formal» da idea el hecho de que ya no se estudia ni siquiera en nuestra Enseñanza Media, donde hasta ahora había tenido su reducto principal. Su desaparición como tema de estudio sistemático ha de ser objeto de agradecimiento no sólo por parte de quienes conocen la historia de la lógica formal hasta el momento presente,

[2] Tomo II, Disc. VIII.

sino, más aún, por parte de aquellos que, conociendo esa historia, conocen también y defienden la de la filosofía escolástica.

2.ª Que no es nuestra intención dar importancia —ni siquiera (contra nuestra enfadosa costumbre) como motivo de sarcasmo— a lo que algunos llaman «lógica dialéctica», entendiendo por tal una disciplina que, operando en el mismo plano teórico que la lógica formal actual (llamada hoy a veces «lógica matemática» o «lógica simbólica»), estaría destinada a sustituirla en las mentes progresistas. Lo menos que puedo decir es que la propuesta de semejante sustitución me parece propia de mentes *regresistas*. Y esto no es —o no es solamente— un juego de palabras: la frecuencia con que los postulantes de esa supuesta lógica del futuro acaban en una reproducción —ampliamente adornada, eso sí, de palabrería al uso— de la lógica más tenebrosamente vieja, merecería ser caracterizada como una «ironía de la razón» de no ser porque la razón es esencialmente irónica.

3.ª Que tampoco vamos a referirnos —y no precisamente porque la despreciemos— a lo que algunos han llamado «lógica concreta». Quizás haya quien piense que, al constituir esta «lógica» lo que históricamente ha venido llamándose «ontología», o, en algún caso, «gnoseología» —o incluso, en algún caso eminente, «teología»—, sería mejor reservarle alguno de esos nombres (o quizás el nombre, bellamente clásico, de «dialéctica», a secas). Pero nadie menos inclinado que yo a poner barreras al uso del lenguaje, y nadie más dispuesto que quien os habla a recordar constantemente que '*logos*' es una palabra simplemente *inmensa*. Así pues, llámesele a eso 'lógica' si se quiere. Pero no se olvide que, como dijo alguien, «No es nuestro oficio establecer prohibiciones, sino llegar a convenciones». Dicho de otro modo —y abusando de Carnap—: en filosofía está prohibido prohibir, pero es obligatorio distinguir. Convengamos, pues, al menos mientras dure esta disertación, en llamar 'lógica' sólo a la lógica formal tal y como hoy nos llega; despidamos, no sin nostalgia, a la dialéctica, que tendrá en este ciclo de conferencias defensores más entusiastas que yo; y dediquemos un recuerdo compasivo a quienes confunden una cosa con otra.

El otro término de esa relación cuyo esquema nos disponemos ha pergeñar es la *filosofía*.

Innecesario es advertir que no voy a responder frontalmente a la pregunta «¿Qué es filosofía?». He leído demasiada filosofía como para tener el descaro de caracterizarla en una pocas frases. Me limitaré —sucumbiendo *trivialmente* a la tentación que la lectura de cierto tipo de teología me suscita— a referirme a ella por vía negativa. Quiere decir: señalaré algunos rasgos que, tal como yo la concibo, la filosofía *no* posee.

En primer lugar, no creo que la filosofía sea algo condenado a desaparecer antes de que desaparezca el género humano. Aunque, como es bien

sabido, la estupidez humana carece de límites, opino que de momento habría que conceder la palma en este sentido a la frase que reza «La filosofía ha muerto». Aunque, bien mirado, señalar la estupidez de esa frase ha pasado a convertirse ya en un rasgo de vulgaridad.

No creo que la filosofía se reduzca o pueda reducirse a algún otro producto cultural que no tenga históricamente ese nombre. La filosofía ni fue ni es ni será una ciencia, ni un arte, ni un culto a nada ni a nadie, ni una forma determinada de acción política, ni un juego algún día disculpable.

Es llamativo el tono vergonzante con que muchos de los que figuran en los censos de la filosofía española ejercen —es decir, no ejercen— su tarea de filósofos. Se trata de graduados en filosofía, que trabajan en Departamentos de Filosofía y que pretenden vivir de la filosofía. Pero eso sí: lo suyo es otra cosa: la historia pura y simple, la sociología, la psicología, la lógica, etc. Y no se trata —porque eso me parecería excelente, hasta el punto de que es lo que yo intento— de que quieran hacer filosofía partiendo de alguna de esas disciplinas. No. Es que ellos quieren ser «científicos». Ellos no son como esos filósofos del pasado —Platón, Guillermo de Occam, Espinosa, Kant, etc.— entrampados en problemas pueriles que a ningún adulto sensato inquietan hoy. La suya es una filosofía «rigurosa» —o bien, pues ésa es la otra cara del asunto, una filosofía «progresista». Como no han leído las *Categorías* de Aristóteles desconocen la teoría de la distinción entre sustancia y accidente, e ignoran que para ser un filósofo riguroso o un filósofo progresista hay que ser, primero, sustancialmente, un filósofo.

Ahora bien: la situación de la filosofía en nuestro entorno, a la vez que da lugar a situaciones de fuga de cerebros como la que a los que parecen creer que la filosofía no (o ya no) sirve para nada —razón por la cual es preferible abandonarla en favor de otras actividades tenidas por más «útiles»—, están aquellos según los cuales la filosofía serviría para todo —para todo lo verdaderamente importante. La necesidad —que algunos sienten— de justificar, ante el alumno en particular o ante la sociedad en general, la presencia de la filosofía en los planes de estudio —o, lo que es la mismo, en los presupuestos generales del Estado— lleva a veces a la presentación de la filosofía como un saber de gran estilo y altos vuelos que trasciende, en amplitud y profundidad, todos los saberes particulares. La filosofía no se limita, como la ciencia, a resolver problemas de menor cuantía. No. La filosofía resuelve sólo las cuestiones de gran envergadura.

He aquí lo que podríamos llamar la concepción de la filosofía como libro de cocina. Como libro de cocina en el que se contienen recetas para todos los grandes platos. ¿El problema de la libertad (o el de la razón, o el de la muerte)? Veamos: se toma una olla, se llena de agua y se pone a calentar a fuego lento. Cuando rompe a hervir se echan en ella unas matas de tomillo y unas hojas de laurel junto con las

páginas n a $n + 18$ de las *Obras Completas* de a (siendo a un parámetro que se puede ejeplificar con el nombre de cualquier pensador). Transcurrido un tiempo prudencial, se escurre y se sirve bien caliente, rociado de agua bendita o de salsa roja, según los gustos del cliente.

La función del filósofo no es la del cocinero de grandes problemas, a cuyas soluciones sabe dar un infalible toque digestivo. Tampoco puede el filósofo convertirse en una especie de dama de compañía que revolotea, deshecha en oficiosidades, en torno al científico. Ni creo que el papel del filósofo sea simplemente el del extravagante bohemio que vive en el ático y da un toque de color al inmueble.

Y bien: nadie dejará de reconocer que he cumplido mi promesa —hecha, por lo demás, hace tiempo, y no referida sólo a esta charla— de no decir qué es para mí la filosofía.

Con todo, espero que de lo dicho se desprenda una cierta idea de la filosofía, no tan vaga como para impedirnos pasar a bosquejar algunas de las conexiones posibles entre ella y la ciencia de la lógica formal. Articularemos nuestro esquema de las relaciones entre ambas en dos apartados fundamentales. La distinción entre ellos es sobre todo una estrategia expositiva, ya que, como se verá, uno y otro plano se cruzan con frecuencia.

La filosofía como fuente de problemas lógicos

Nadie —ni siquiera quienes piensen que es tarea de iluminados— negará que, al menos en parte, la filosofía es una actividad argumentativa. Aunque pueda ser el fruto de una inspiración, el discurso filosófico —de otro modo, no sería un discurso— muestra una ilación, se expresa en una trama de enunciados algunos de los cuales presuponen otros, o bien se siguen de otros, o bien son contradictorios con otros, etc. En este sentido —y dado que nociones tales como la de presuposición, o la de implicación, o la de contradicción, son nociones lógico-formales—, existe una obvia conexión entre lógica y filosofía, o, por mejor decir, una evidente posibilidad de aplicación de la primera a la segunda. Se trataría de analizar formalmente una argumentación filosófica para ver si, por ejemplo, hay efectivamente una conexión necesaria entre el o los enunciados que figuran como premisas y el enunciado propuesto como conclusión. Es posible, por poner algún ejemplo, esquematizar en lógica de enunciados ciertas argumentaciones contenidas en el *Parménides* de Platón; o analizar en términos de la lógica general de predicados el argumento que, con el nombre de «ontológico», pretende demostrar la existencia de un Dios;

o examinar formalmente, como hace Carnap[4], la inferencia cartesiana del «yo pienso» al «yo existo».

Pero no es este plano —el plano del análisis de la argumentación filosófica como ejercicio de lógica— el más interesante aquí. En efecto, la función de este análisis lógico es, prácticamente siempre, *retórica* (dicho sea en el mal sentido que el uso común ha dado a este vocablo). Retórica, sí, por cuanto, ¿cuál sería la efectividad filosófica del resultado de ese análisis? Si el análisis revela que la argumentación es lógicamente válida, los seguidores de la filosofía en cuestión hallarán en ello una confirmación adicional, pero no sustancial, de sus concepciones, en tanto que los enemigos se refugiarán en el expediente de impugnar la verdad de las premisas. Si, por el contrario, el veredicto de la lógica es desfavorable, los partidarios de esa filosofía aducirán acaso que el análisis formal no lo es todo, y, por su parte, los detractores habrán de conformarse con haber ganado una batalla —mostrando la escasa pulcritud argumentativa del autor de que se trate, y fustigándolo con su desdén—, sin por ello haber ganado la guerra —sin por ello haber demostrado contundentemente que no hay un grano de verdad en lo que el tal autor dice.

Pero al lado de este análisis lógico en sentido estricto, fuerte, escolar, habría un análisis lógico en sentido débil, en sentido amplio. Hemos, en efecto, definido la lógica como aquella ciencia que se constituye asumiendo por tarea el análisis formal del razonamiento. Ahora bien: es preciso entender esa definición en su sentido entero, es menester aprehenderla en todos sus supuestos e implicaciones. Porque, ¿qué es un razonamiento? Desde el punto de vista de la psicología, es el proceso mediante el cual inferimos cierta afirmación a partir de otra u otras afirmaciones. Desde el punto de vista lógico, un razonamiento es el resultado de ese proceso: un conjunto de enunciados, uno de los cuales se fundamenta en los restantes. Y, ¿qué es un enunciado? He aquí, por ejemplo, un tema del que la lógica ha de ocuparse antes de proceder a estudiar las relaciones de inferencia entre enunciados. Por otra parte —y por poner un segundo ejemplo—, hay casos en los que la inferencia de un enunciado a partir de otro sólo es posible en virtud de las particularidades de la estructura interna de dichos enunciados. Parece razonable exigir que la lógica dé cuenta de esa estructura interna en aquellos aspectos —identificación de nombres, de descripciones, de predicados, de cuantificadores— que revistan alguna trascendencia para la legitimidad de dicha argumentación.

Con otras palabras: la lógica es el análisis de la validez formal del

[4] «Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache», *Erkenntnis*, vol. II (1932). Reimpr. en inglés en A. J. Ayer (ed.), *Logical Positivism*. Glencoe, Ill., The Free Press, 1959. *El positivismo lógico*. V. cast. de L. Aldama *et al.*, Méjico, FCE, 1965, pp. 66-87, pp. 80-1.

razonamiento y, *por descontado*, el estudio de todo aquello que, desde ese mismo punto de vista formal, venga presupuesto por dicho análisis. Y estamos empleando el término 'presuposición' en su sentido clásico estricto. Que el enunciado *E'* presupone el enunciado *E* quiere decir —como ya sabía Frege— que el enunciado *E'* no es ni verdadero ni falso —no tiene sentido *en lógica clásica*, por tanto— a menos que *E* sea verdadero. Un ejemplo: antes hemos hablado del análisis a que Carnap somete la inferencia '*cogito, ergo sum*'. Pues bien: no es sólo que la inferencia sea incorrecta (pues de «yo pienso» sólo se sigue «existe algo que piensa»), sino que hay un error previo: la expresión '*sum*' —es decir, 'yo soy o existo'— está mal construída, ya que, como señala Carnap, «la existencia sólo puede ser enunciada en conexión con un predicado, no en conexión con nombres»[5]. Hoy, cuarenta y cinco años después de la publicación del artículo de Carnap, no se podría ser tan tajante como éste —aunque sólo sea por la existencia de una lógica no-clásica llamada «lógica libre»—, pero el ejemplo que hemos puesto mantiene enteramente su valor ilustrativo.

El análisis lógico presupone un análisis —lógico— del lenguaje. Y puesto que el lenguaje es esencialmente un marco conceptual, un aparato de aprehensión del mundo, el análisis lógico en este sentido amplio será, sobre todo, un análisis de aparatos conceptuales. No es lo mismo esquematizar, como ejercicio en un curso de Lógica, las argumentaciones de Platón en el *Parménides* que perseguir los sentidos con que Platón utiliza el verbo 'ser' en *El Sofista*; no es lo mismo ejercitarse en la técnica codificada de análisis lógico formalizado una argumentación contenida en *El Capital* de Marx que estudiar la legitimidad del paso de un sistema de valores a un sistema de precios en esa misma obra. En otro lugar hemos hablado de «lógica *profana*» o de «uso *profano* o *mundano* del término 'lógica'». Dicha lógica profana —algo así como una teoría de teorías— vendría constituída por el intento de categorizar y entramar los conceptos implícitos en expresiones como «*la lógica* de la investigación científica», «*la lógica de* la *Fenomenología del Espíritu*», «*la lógica de* la sociedad capitalista», o en la presencia del sufijo '-lógico' o '-logía' en palabras como «epistemo*lógico*», «paraxeo*logía*», etc. Se trataría de un uso que pudiéramos llamar «conceptual» del análisis lógico; un uso que, llevado *al extremo*, explicaría por qué alguien como Kant ha hablado de «lógica *trascendental*», o por qué alguien como Wittgenstein ha llegado a decir que la lógica (formal) es de suyo trascendental.

Ahora bien: quizás este somerísimo examen de la utilidad —por no decir necesidad— de la lógica para la filosofía hubiera de plantearse de otro modo. Parece, en efecto, como si en lo dicho hasta ahora estuviera implícita la convicción de que la lógica formal es algo acabado, hecho y derecho, un sistema de metacategorías perfecto e inmutable que lanzamos sobre el discurso filosófico en la seguridad de que de ello

[5] *Op. cit., loc. cit.*

brotará una eterna luz. Y no. La lógica puede presumir de muchas cosas, y, entre ellas, de hallarse perpetuamente inacabada. La lógica no es un tribunal definitivamente constituido ante el que comparece —temblorosa, agudizado su proverbial sentimiento de culpa— la filosofía. En primer lugar, porque la lógica no es un tribunal. En segundo lugar, porque la lógica no está definitivamente constituida. La lógica es, más bien, un sistema de discernimiento en lo formal, una instancia de análisis a la que *se puede* (la verdad es que no sé si se debe) acudir, y que precisamente se caracteriza por estar remodelándose de continuo en respuesta a las demandas de análisis formal que los múltiples y variados tipos de discurso plantean. Constantemente se cobra conciencia de la existencia, o de la peculiaridad, de patrones de inferencia —de modos de razonar en la ciencia o en la vida cotidiana— que hasta entonces no se habían tenido en consideración y que, por consiguiente, exigen, entre otras, una consideración formal, que sólo la ciencia de la lógica puede prestarles. Es, en efecto, la lógica la que tiene que «poner en limpio» esos modelos de conducta argumentativa. Bien dice John Stuart Mill —y bien podemos suscribir su afirmación si dejamos a un lado el contexto, psicologista, que en su obra la rodea— que «la extensión de la Lógica como Ciencia está determinada por sus necesidades como Arte»[6]. Si convenimos en decir que las necesidades de la Lógica como Arte no son otra cosa que las exigencias de su aplicación, podremos decir asimismo que la ciencia de la Lógica se desarrolla al ritmo y con las particularidades que le dicta la urgencia con que los múltiples campos del discurso humano la reclaman puntualmente.

Esta reclamación, que le ha venido a veces de la Matemática, a veces de la Psicología, a veces de la Física, le ha venido también, en ocasiones, de la Filosofía. Sería excesivamente largo en tiempo reseñar las variedades de lógica no-clásica nacidas por estímulo filosófico, surgidas de la necesidad de aportar un análisis lógico de ciertos problemas de filosofía. De entre los diversos ejemplos posibles[7] elegiremos uno bastante reciente. Desde hace once años, Lofti Zadeh viene elaborando lo que él llama *«fuzzy set theory»*, o «teoría de los conjuntos borrosos»[8], sobre la que retoma George Lakoff el estudio de lo que los lingüistas llaman *«cercas semánticas»*

[6] *A System of Logic.* Fragmento recogido en I. M. Copi y J. A. Gould (eds.), *Readings on Logic.* N. York, The MacMillan Company, 1964, pp. 53-61, p. 60.

[7] Citemos tres: el nacimiento de la lógica trivalente de Łukasiewicz ante la necesidad de afrontar adecuadamente el problema filosófico del determinismo (cfr., J. Łukasiewicz, «O Determinizmie», en *Z zagadnień logiki i filozofii.* Varsovia, 1961. V. cast. en J. Łukasiewicz, *Estudios de lógica y filosofía.* Intr., selec. y trad. de A. Deaño. Madrid, Revista de Occidente, 1975, pp. 43-60); en segundo lugar, el nacimiento de la lógica deóntica (cfr., G. H. von Wright, «Denotic Logic», en *Mind*, vol. LX (1951), pp. 1-15. V. cast. en A. Deaño (ed.), *Lecturas de lógica formal.* Madrid, Alianza Editorial (en prensa)); por último, el desarrollo de la «lógica libre» (cfr., H. Leonard, «The Logic of Existence», en *Philosophical Studies*, 7 (1956), pp. 49-64).

[8] Cfr., entre otros trabajos, el primero de ellos: «Fuzzy Sets», en *Information and Control*, 8 (1965), pp. 338-53.

(*semantic hedges*)*, esto es, de palabra cuyo significado conlleva implícitamente borrosidad, palabras cuya función es hacer las cosas más o menos borrosas[9]. Desde el punto de vista lingüístico se trata de un tema en absoluto intrascendente o de puro detalle. Piénsese, por ejemplo, en la cerca semántica 'una especie de' y supóngase que alguien dice: 'Hegel era una especie de lechuza'. Se reparará entonces en lo siguiente: al decir de alguien que es «una especie de lechuza», estamos, por medio de esa cerca semántica, afirmando las connotaciones del predicado 'lechuza' al tiempo que presuponemos la negación del significado literal. Es evidente que Hegel no era, *literalmente*, una lechuza, aunque pueda decirse —y con matiz meliorativo— que posee algunos de los rasgos de ese animal (aquellos, por ejemplo, que permitían hablar al propio Hegel de «la lechuza de Minerva»). Ahora bien: se piensa de ordinario que esta distinción entre el significado literal y el significado connotativo de una expresión corresponde a la distinción entre dos grandes ramas de la semiótica: la semántica y la pragmática. Se da, en efecto, por descontado que las connotaciones de las palabras forman parte de la pragmática, y que los aspectos pragmáticos del significado no entran en juego a la hora de la asignación de valores de verdad, interviniendo en ello exclusivamente el significado literal. Habría, así, una frontera entre la pragmática y la semántica.

Pero he aquí que, en frases como éstas en que aparece el giro 'una especie de', nos encontramos con que el valor de verdad no depende estrictamente del significado literal de las expresiones que en ella figuran, sino que está en función también de sus connotaciones. Ello indica, en opinión de Lakoff, que la semántica y la pragmática, lejos de poder considerarse independientes, se hallan inextricablemente ligadas[10].

Pues bien: según Lakoff, esos conceptos borrosos —en sí mismos borrosos, o borrosos por hallarse semánticamente cercados— exigen, para poder ser objeto de «un tratamiento serio dentro de la semántica formal», una teoría lógica peculiar. Volviendo a nuestro tema, diríamos que aquellos razonamientos en los que figuran enunciados borrosos requieren, a lo que parece, un tratamiento lógico específico, una *«fuzzy logic»*.

Pudiera, sin embargo, hacerse en este instante esta pregunta: ¿Qué tiene esto que ver con la filosofía? Pues bien: bastante. Y no simplemente porque el discurso filosófico esté expresado en el lenguaje *ordinario*, que hierve de términos borrosos, sino sobre todo porque la filosofía hace de

* Véase más arriba, las págs. 303-306.

[9] G. Lakoff: «Hedges: A Study in Meaning Criteria and the Logic of Fuzzy Concepts», en Peranteau *et al.* (eds.), *Papers from the Eight Regional Meeting. Chicago Linguistic Society.* Chicago, 1972, pp. 183-228. Reimpr. con modificaciones en D. Hockney, W. Harper y B. Freed (eds.), *Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics.* Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1975, pp. 221-271. Las referencias lo son a esta última adición.

[10] G. Lakoff, *op. cit.*, pág. 237.

ese lenguaje un uso *extraordinario*, no normal: la riqueza del lenguaje filosófico le viene del empleo pregnante de términos borrosos —de términos que poseen amplias y profundas connotaciones— o bien de la rigurosa matización —mediante cercas semánticas— de las expresiones que utiliza. La complejidad semántico-pragmática de ese discurso demanda una lógica cada vez más refinada. Y por ello, por ser fiel a su objeto, el análisis lógico se hace cada vez más sutil[11].

En resumen: hay profesionales de la lógica que se erigen en jueces de la filosofía. Los hay que se las dan de fiscales. Y no faltan quienes quisieran ejercer de verdugos. A mí, personalmente, me gusta más el papel de abogado defensor (aunque la verdad es que hay causas filosóficas indefendibles).

La lógica como fuente de problemas filosóficos

Es evidente que este apartado podría haber llevado igualmente el título de «Filosofía de la Lógica». En ese sentido, cabría quizá distinguir cuatro planos de reflexión filosófica en torno a la lógica formal.

Un primer plano, el más bajo, sería aquel caracterizado por que en él la reflexión filosófica se realiza *dentro de* un determinado cálculo lógico, sin poner éste en cuestión —y, por ende, sin poner en cuestión la lógica como tal en su presente estado. Cuando se discuta, por ejemplo, si el cuantificador universal de la lógica clásica de predicados tiene o no implicaciones ontológicas; o cuando se examine la conveniencia de interpretar el tercer valor —al lado de los de verdad y falsedad— admitido en una lógica trivalente como un valor de posibilidad o más bien como un valor de indeterminación; cuando se hace algo semejante, decimos, se está haciendo filosofía de la lógica en esta primera acepción, en este primer plano que hemos discernido.

Cuando la reflexión se ejercer *en torno a* —y, por tanto, desde fuera de— un determinado cálculo (con frecuencia para ponerlo en relación con otro sistema formal), estamos haciendo filosofía de la lógica en un segundo sentido. Aquí, en este segundo plano de consideración lógico-filosófica, tendrían lugar planteamientos tales como el de si una lógica modal y con cuatro valores es filosóficamente preferible a la lógica clásica (asertórica y bivalente) o como el de si la lógica libre es un fragmento o bien una extensión de la teoría clásica de la cuantificación. En general, es en este nivel donde se situaría el examen del problema

11 [Nota añadida posteriormente] El concepto de 'conjunto borroso' llegó a hacerse extraordinariamente popular —ésa es la palabra— a lo largo de la Semana, siendo frecuente su empleo, con distintos fines, en conferencias, seminarios, y charlas de sobremesa y pasillo. He querido ver en ello una primera y esperanzadora confirmación de su fecundidad filosófica.

—cada día más ramificado— de la posibilidad de cambiar de lógica» (en el sentido, claro es, de cambiar de cálculo lógico), de reemplazar la lógica clásica por alguna lógica divergente.

Pero cabría ir más lejos todavía en este viaje filosófico a través de la lógica. Cabría intentar trascender todos los cálculos lógicos actualmente existentes y situarse en una perspectiva más amplia: una perspectiva desde la cual la lógica actual aparecería como un todo, y desde la cual, por tanto, sería posible cuestionar la lógica en su forma actual, en su presentación formalizada. ¿Es el razonamiento reductible a cálculo? ¿Existe la posibilidad de diseñar un algoritmo de formalización, es decir, un método automático de traducción del lenguaje natural al lenguaje formalizado de la lógica? He ahí dos preguntas —de signo contrario— que pertenecen, al igual que sus respuestas, a un plano lógico-filosófico distinto de los anteriores; a un tercer plano, por tanto.

Y no es el último. Porque junto a la posibilidad de hacer filosofía de la lógica encerrándose en un cálculo, y a la de hacer filosofía de la lógica a horcajadas entre un cálculo y otro, y a la de hacer filosofía de la lógica explotando la idea de cálculo —o bien dudando (a nuestro juicio, injustificadamente) de la conveniencia de reducir la lógica formal a la lógica formalizada—, existe la posibilidad de *salirse* filosóficamente de la lógica formal en cuanto tal para luego, desde fuera de ella, hacerla objetivo, globalmente, de consideración filosófica. Y si alguien me dice que es imposible salirse de la lógica formal, sólo puedo recomendarle que le pregunte al autor del *Tractatus Logico-Philosophicus* cómo se las arregló él. Aunque no sea posible, *literalmente* —las cercas semánticas, una vez más—, salirse de la lógica formal, sí es posible hacerlo *filosóficamente*, es decir, idealmente, del mismo modo que Kant se situaba idealmente por encima de las formas *a priori* del conocimiento para poder luego reconocerlas, o Hegel, que se sabía objeto de la historia, trazaba la teoría de ésta para dejar que ésta lo engullera. Este cuarto y supremo plano de la filosofía de la lógica es, pues, el de la filosofía de la lógica en sentido envolvente: la lógica concebida como una galaxia —todavía inexplorada en su totalidad, por otra parte—, y el filósofo erigido en inmenso astrónomo aficionado.

Ya hemos visto cómo hay desafíos a la lógica —por parte de la argumentación filosófica, del razonamiento científico o, sin ir más lejos, de la vida cotidiana en general— que no hacen más que dar pábulo a su desarrollo. Dicho de otro modo: hay problemas que no hacen sino afiliar la hoja del análisis lógico.

Pero también hay problemas —viejos y resistentes problemas filosóficos— que parecen mellarla. Hay problemas cuya consideración lleva a la conciencia de la parcialidad del análisis lógico-formal, a la lucidez que ilumina la gran verdad de que la recionalidad formal no lo es todo.

Y ese convencimiento es, una vez que se ha asumido cabalmente, estímulo para empreder una reflexión sobre la naturaleza de la lógica

formal en sí misma, para hacer que la lógica formal comparezca ante el *logos* entero.

Porque es que la lógica es una ciencia muy curiosa. La lógica —y espero que, aun en su extrema brevedad, lo que a continuación voy a decir sirva para paliar la perplejidad que pudiera producir mi afirmación— es una *ciencia filosófica*.

Los enunciados de la lógica, las «verdades lógicas» —y no me parece éste el momento de hacer una teoría de todas las teorías al respecto, previa su exposición— no son registros de observaciones empíricas, ni formulación de conjeturas contrastables, ni recopilación de reglas lingüísticas, ni revestimiento verbal de experiencias quasi-inefables, sino expresión de las condiciones formales de todo discurso posible sobre el mundo, configuración del ámbito dentro del cual —y sólo dentro del cual— *cabe* el pensamiento. La lógica es una ciencia *previa*, la ciencia de los requisitos más remotos —no, desde luego, en sentido temporal— de toda actividad teórica; una ciencia que viene constituida por el regreso sistemático a aquellos esquemas sin los que es imposible la inteligibilidad de cualquier discurso. La lógica es, muy en general, la teoría de la *ilación*. Ese es precisamente el motivo de que la lógica, aunque en otro sentido y por otros motivos pueda resultar abstrusa —es decir, abstracta en grado *sumo*—, se aparezca en ocasiones como algo de cajón, como una sistemática tecnificación de perogrulladas. No me extrañaría que alguien, por ejemplo, leyendo que, según la lógica, es verdad que «si *p* y *p*, entonces *p*» (donde '*p*' es una letra esquemática que puede sustituirse por cualquier enunciado), se sintiera casi como —y lo de 'casi' lo digo porque sin duda se sentirá más triste que— el lector de las *Instrucciones para subir una escalera*, admirable relato de Julio Cortázar. El efecto estético de este texto proviene de que en él se solemniza lo obvio, de que en él se instruye al lector en la realización de algo que el lector sabe realizar perfectamente sin necesidad de un método. El hombre aprende a subir escaleras a una edad a la que no lee manuales, y, a partir de ese momento, cuando asciende por una escalera lo hace para llegar a un lugar donde hacer cosas más interesantes. La gracia del escrito de Cortázar consiste en que, en él, el acto de subir escaleras se convierte en un fin en sí mismo, en algo que, siendo de suyo irreflexivo, aparece como objeto de meticulosa reflexión.

Así también a veces con la lógica, cuyas verdades, como ha señalado Quine, son «potencialmente obvias», evidentes en principio. Parece, en efecto —y ello produce en quienes la estudian (y, por supuesto, en quienes la enseñan) un sentimiento de impaciencia— como si en lógica se estuviera enseñando a hacer con andadores y sesudamente algo que sabemos hacer y sin pararnos a pensar; como si la lógica nos obligara a contar con algo que dábamos ya por descontado. Y eso se debe, ya lo hemos dicho, a que la lógica tiene por objeto el estudio de las exigencias formales de inteligibilidad de todo discurso, los esquemas de ilación que se dan por

supuestos en todo ejercicio de la conciencia, y entre ellos hay algunos bastante elementales.

La lógica es ciencia constitutivamente reflexiva. La lógica es ciencia de sí misma. Si tiene por objeto todo discurso, objeto suyo será también y eminentemente, el propio discurso de la lógica formal. De ninguna otra disciplina —*salvo, precisamente, de la filosofía*— puede decirse algo semejante. La lógica, sin duda por eso, es ciencia autocrítica: es una ciencia que, además de saber romper constantemente sus límites históricos —ahí está la proliferación de lógicas no-clásicas—, ha sabido *reconocer* sus límites de principio.

Aunque sólo fuera por eso, la lógica sería ya una ciencia *irónica*, una ciencia que, como las mejores filosofías[12] es capaz, *en su interior*, de mostrar implacablemente las limitaciones del proyecto que la constituye. En otro lugar hemos dicho que la lógica es a la vez «capacidad de análisis y posibilidad de ironía». Y eso no es exactamente cierto. Cuando está en manos de alguien para quien hacer filosofía constituye una forma de vida, la lógica es *necesidad* de ironía. Y ello precisamente en el sentido aludido: en el sentido de que hacer lógica con consciencia de lo que se está haciendo presupone la comprensión de que no se está haciendo todo, ni tampoco todo lo importante. Saber lógica formal es saber que hay que pensar, a través de ella, más allá de ella.

Hasta más allá de ella, sí. Pero a través de ella. Porque es que alguien, en efecto, podría decir que para ese viaje no hacen falta alforjas, y que para alcanzar la consciencia de que la lógica formal no basta es innecesario sumergirse en ella. A esos «superadores» —de *aufheben*— profesionales, que viven en perpetua asunción a los cielos y que están insultando a Hegel cuando lo esgrimen, habría que explicarles amablemente que no es muy honrado escribir libros sobre moral sexual cuando se es virgen.

Así pues, la lógica es ironía en sentido clásico: es mayéutica. Y es también —como demostrará su historia, cuando ésta se haga de veras (es decir, cuando se haga historia de la lógica entendiéndola como lógica del descubrimiento en lógica)— ironía en el sentido de los románticos: ella misma escenifica en su propio seno la tensión entre lo puramente formal y lo que no lo es, entre lo que su análisis captura y aquello que por principio se le escapa. Ella misma traza sus límites nítidamente.

[12] Quiero recordar aquí, a título de ejemplo, el espléndido análisis que Vidal Peña ha hecho del nudo de la filosofía de Espinosa. Así, por ejemplo, en la Introducción a su edición de la *Etica* (Madrid, Editora Nacional, 1975, págs. 40), nos dice: «En el seno del propio racionalismo, partiendo del método que expresa mejor que ningún otro la razón de su época —la lengua matemática— *muestra* Espinosa las limitaciones de ese 'racionalismo absoluto'». Lo que la estructura de la *Etica* exhibe es «la efectiva contradicción entre un orden deductivo, asumido por ser expresión de la racionalidad, y el contenido de ese orden, el contenido de ciertos conceptos contenidos en él, que rompen la rosada pretensión de tratar la realidad como algo íntegramente inteligible».

Ella misma dibuja su contorno como con bisturí. Así su menesterosidad resulta más elegante. Así —permítasele a un profesor de Lógica este juego con el lenguaje— se sombra queda clara.

Terminamos ya. El padre Feijóo, en el texto que al principio hemos citado, contraponía el delirar con valentía al discurrir con perplejidad. Me sentiría más tranquilo si no existiera otra posibilidad: la de establecer una contraposición entre el delirar con perplejidad y el discurrir con valentía. Puesto que tengo la triste seguridad de no haber hecho esto último, quiero creer que no he dado tampoco un ejemplo demasiado flagrante de lo primero. No obstante, y ya que me habéis otorgado el derecho a hacer angelología filosófica —el derecho a hablar de lógica formal, de filosofía, y de las eternas bodas entre ambas *como si no existiera otra cosa*—, concededme también el derecho al delirio inseguro. Pero —puesto que he llegado hasta aquí— ya me lo habéis concedido. De modo que gracias por ello y por todo.

Apéndice
EJERCICIOS DE DEDUCCION

En este Apéndice presentamos un conjunto de ejercicios de deducción resueltos que abarcan todo lo estudiado a lo largo del libro. En atención a una serie de peticiones y sugerencias, hemos introducido un número muy considerable de ejercicios nuevos, manteniendo al propio tiempo la casi totalidad de los que aparecían en las ediciones anteriores.

Ni que decir tiene que estos ejercicios están destinados exclusivamente al principiante. Ello hace que, por una parte, se trate de ejercicios relativamente fáciles en su mayoría, incluso tremedamente fáciles en algunos casos. Ello explica, por otra parte, que, aun a riesgo de resultar tediosos, hayamos presentado ejercicios a veces muy semejantes entre sí. Además, y por la misma razón, hemos procurado no ahorrar ningún paso en las deducciones, por trivial que fuera.

1. Problemas

EJERCICIO 1. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (p \land q) \rightarrow r \\ p \\ \hline q \rightarrow r \end{array}$$

EJERCICIO 2. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \lor s \\ s \rightarrow \neg q \\ \neg r \\ \hline \neg p \end{array}$$

EJERCICIO 3.—*Demostrar la validez del esquema anterior por el método de reducción al absurdo.*

EJERCICIO 4. *Esquematizar la argumentación —que presentamos muy simplificada— contenida en el siguiente texto de Platón* (Parménides, *138b7*) *y demostrar su validez:*

> Si lo Uno está en movimiento, éste habrá de ser, o de movimiento sin cambio en el estado, o de alteración.
> No puede tratarse de un movimiento de alteración, porque entonces lo Uno dejaría de ser Uno.
> Si se tratara de lo primero, tendría que ser, o bien rotación de lo Uno sobre sí mismo en el propio lugar en que se encuentra, o bien cambio de un lugar a otro. Ninguna de las dos cosas ocurre, sin embargo.
> Luego lo Uno no está sujeto a ningún tipo de movimiento.

EJERCICIO 3. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} r \rightarrow s \\ p \vee q \\ \neg(\neg p \rightarrow s) \\ \hline q \wedge \neg r \end{array}$$

EJERCICIO 6. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow p \\ \neg r \rightarrow \neg t \\ \neg(s \wedge \neg r) \\ t \vee s \\ \hline q \vee u \end{array}$$

EJERCICIO 7. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ q \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

EJERCICIO 8. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow (q \vee r) \\ p \rightarrow s \\ q \\ \hline s \end{array}$$

EJERCICIO 9.—*Esquematizar el razonamiento contenido en el siguiente texto de Wittgenstein* (Tractatus Logico-Philosophicas, *5.5521*) *y demostrar su validez:*

> «... Si pudiera haber una lógica incluso aunque no hubiera mundo, ¿cómo puede haber una lógica, dado que hay un mundo?»

EJERCICIO 10. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow r \\ \neg(p \vee r) \rightarrow s \\ p \rightarrow q \\ \hline \neg s \rightarrow r \end{array}$$

EJERCICIO 11. *En el poema* Le Sylphe, *de Paul Valéry, hay un verso que dice* «Hasard ou génie?». *Jorge Guillén traduce:* «¿Genio si no azar?» *¿Sería válido el texto de Guillén no ya sólo como traducción de Valéry, sino como conclusión obtenible a partir de éste tomado como premisa, una vez suprimido su carácter interrogatorio?*

EJERCICIO 12. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} s \leftrightarrow t \\ t \vee p \\ s \rightarrow \neg w \\ w \\ \hline p \end{array}$$

EJERCICIO 13. *Demostrar la validez del esquema anterior por el método de reducción al absurdo.*

EJERCICIO 14. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ (r \wedge s) \rightarrow t \\ \hline (p \wedge q \wedge s) \rightarrow t \end{array}$$

EJERCICIO 15. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ \hline q \rightarrow (p \rightarrow r) \end{array}$$

EJERCICIO 16. *Al comienzo del capítulo III de este libro hemos traído a colación un pasaje de una novela de Jonathan Princeford titulada* No más allá del otro lado de los mares. *Presentamos ahora, como materia de ejercicio lógico-formal, un texto perteneciente a otra novela del mismo autor* —La pluma fuente—. *Se trata justamente de los últimos momentos del relato, aquellos en que se nos narra el desenlace. Lo que se pide es que el lector esquematice las argumentaciones —pues son varias— contenidas en el pasaje y deduzca en cada caso las conclusiones válidas. A fin de no vernos obligados a repetir el texto cuando llegue el momento y el lugar de dar la respuesta al ejercicio, iremos indicando al margen la esquematización más justa a nuestro juicio. Se recomienda que el lector la tape mientras lee y que, en todo caso, no se limite a darla por buena antes de empezar a deducir:*

El texto de Jonathan Princeford es el siguiente:

Diminuto y petulante, el Doctor Asquith paseó su mirada por el salón y contempló los rostros mitad tensos y mitad cansados de todos —pues nadie faltaba— los allí reunidos.

—Veamos —comenzó. Presten oído a mi argumentación, porque ocasión les va a dar ella inmediatamente de comprobar el poder demoledor de mi raciocionio. Permítanme que vuelva al principio, como si todos ustedes ignoraran cuanto ha sucedido entre nosotros en estos últimos días. Lady Crazybird, dueña de esta mansión en que nos encontramos, ha sido víctima de un asesinato en la noche del pasado viernes. La casa de Lady Crazybird, en lo alto de esta montaña, está, desde hace once días, aislada por la nieve. Así, pues, sólo diecisiete personas —doce invitados y cinco sirvientes— han podido perpetrar el crimen. Tengo razones, sin embargo, para descartar a quince de ellos y
concentrar mi reflexión en dos de sustedes. A mi modo de ver, el asesino es una de estas dos per- *Esquematización*
sonas: Lester y Bargley. $p \vee q$

Haciendo caso omiso de la commoción que en su auditorio produjo este último enunciado, el Doctor Asuith prosiguió:

—Les invito ahora a considerar conmigo la primera de estas dos posibilidades. Supongamos, pues, que es Lester el asesino. Conociendo p
a Lester —su gusto por lo espectacular, su escasa ponderación— yo me inclinaría a pensar

que cualquier asesinato del que él fuera autor
habría de redundar en un llamativo derrama- $p \to r$
miento de sangre. No ha sido así, empero. Y
me resisto a creeer que Lester haya cometido el $\neg r$
crimen en un rapto de templanza.

Prosigamos, sin embargo. Si Lester ha perpetrado el asesinato, entonces ha tenido que
tener, por una parte, un motivo, y, por otra $p \to (s \wedge t)$
parte, una ocasión para hacerlo. Motivos no le
faltan, ciertamente. Lo que no comprendo, en s
cambio, es cómo ha podido ejecutarlo. Magda Crazybird fue muerta entre las doce de la noche y la una de la madrugada. Y desde las once
hasta las dos de ese mismo día Lester estuvo $\neg t$
conmigo en la biblioteca trasegando *ginger ale* y cantando las excelencias de la poesía escandinava medieval.

Pero veamos ahora lo que ocurre con Bar- q
gley. Bargley es hombre circunspecto y afable, no exento de sensibilidad. De él sí que esperaría $q \to \neg r$
yo un crimen delicado como éste[1]. $\neg r$

Tuvo Bargley, además, ocasión de hacerlo: $q \to (s' \wedge t')$
nadie lo vió entre las once y media y la una y t'
cuarto... Nadie, salvo tal vez la víctima. Ahora bien: ¿qué motivo podía tener Bargley para matar a Magda? En un cierto sentido, lo que a
Bargley interesaba era justamente lo contrario: $\neg s'$
que Magda viviera. En efecto: en un cajón del tocador de Magda he hallado su testamento. En él se dispone que se le pase a Bargley una pensión de cien libras semanales mientras ella viva, y que se le suspenda esa asignación a partir del momento en que ella muera.

Pienso, por otra parte, que si Bargley hubiera cometido el asesinato, no hubiera dejado de $q \to u$
procurarse una coartada. Y el hecho es que no
la tiene... $\neg u$

Hay, señores, sin embargo, una consideración cuya fuerza se me impone sobre la de todas
las demás. Y es la siguiente: si Lester, según $\neg m \to p$
todas las apariencias, no pudo cometer el crimen

[1] En el capítulo IV de la novela alguien asesina a Magda Crazybird por el procedimiento de introducir flores —heladas— en su conducto respiratorio hasta impedir a éste primero su normal funcionamiento y finalmente su funcionamiento en precario.

entonces es que fue él quien lo cometió. Precisamente porque parece imposible. Eso es lo que enseñan las ciencias ocultas. El es el asesino. $\neg m$ p

Se oyó, en ese mismo instante, un ruido al fondo de la habitación. Lester había abierto de golpe la ventana y, al verse descubierto, había huido por ella. La policía, que lo esperaba, lo apresó en el jardín, junto al macizo —nevado— de rododendros.»

EJERCICIO 17. *Demostrar que la expresión* $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q]$ *es tautológica.*

EJERCICIO 18. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\frac{p \rightarrow (p \rightarrow q)}{p \rightarrow q}$$

EJERCICIO 19. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\frac{\neg p \rightarrow p}{p}$$

EJERCICIO 20. *Resolver la siguiente argumentación:*

(Se trata de un sencillo razonamiento que aparece en el Parménides *de Platón, 137 c4-d3. Lo reproduciremos e iremos formalizándolo al margen.) Es Parménides quien conduce el diálogo y Aristóteles quien responde:*

—«Empecemos, pues. Si lo uno es, ¿no es cierto que no podría ser muchos? $p \rightarrow \neg q$

—¿Cómo podría serlo?

—Y entonces no podrá tener partes ni ser un todo. $\neg q \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$

—¿Por qué?

—Porque la parte, parte es de un todo.

—Ciertamente.

—¿Y no es un todo aquello a lo que no falta parte alguna?

—Desde luego.

—Y en ambos casos —ya se lo considere como un todo, ya se le considere como dotado de partes— lo uno habría de ser compuesto. $(r \vee s) \rightarrow t$

—Necesariamente.

—De modo que en ambos casos lo uno resultaría ser muchos y no uno. $t \rightarrow q$

—Cierto.

—Pero necesariamente lo uno no es muchos sino uno.

—Así es.

—Luego si lo uno es uno, ni es un todo ni tiene partes[2]. $p \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$

EJERCICIO 21. *Derivar* '$(r \vee s) \rightarrow t$' *a partir de* '$r \rightarrow p$', '$\neg q \rightarrow \neg r$', '$s \rightarrow q$', '$(p \wedge q) \rightarrow t$' *y* '$\neg s \vee p$', *directamente y por el método de reducción al absurdo:*

EJERCICIO 22. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (q \vee \neg s) \rightarrow t \\ \neg q \rightarrow r \\ p \rightarrow \neg s \\ t \rightarrow s \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

EJERCICIO 23. *Demostrar la validez del esquema anterior por el método de reducción al absurdo.*

EJERCICIO 24. *Demostrar la validez del siguiente esquema:*

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) \\ \neg(\neg p \vee \neg r) \\ \neg t \rightarrow \neg(p \wedge s) \\ \hline t \end{array}$$

EJERCICIO 25. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\frac{s \rightarrow q}{[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (s \rightarrow r)]}$$

EJERCICIO 26. *Derivar* 'q' *a partir de* '$p \wedge \neg p$'.

EJERCICIO 27. *Analizar formalmente las argumentaciones contenidas en el siguiente texto de Lewis Carroll*[3]:

[2] A efectos de formalización hemos dado por diénticos el enunciado 'lo uno existe [como tal uno]' y el enunciado 'lo uno es uno', esquematizado ambos por 'p'.

[3] Esta especie de ensayo de lógica novelada fue publicado, con el título de «A Logical Paradox», en la revista *Mind*, N. S., núm. 11 (julio, 1894). Hay versión castellana —y de ella nos hemos servido— en: L. Carroll. *El juego de la lógica y otros escritos* Madrid, Alianza Editorial, 1972, págs. 143-149.

«¿Cómo? ¿No tienes nada que hacer? —dijo tío Jim—. Entonces ven conmigo a casa de Allen. Puedes dar una vuelta mientras yo me afeito.»

«De acuerdo —dijo tío Joe—. Supongo que el cachorro podría acompañarnos, ¿no?»

«El cachorro» era yo, como quizá haya adivinado el lector por sí mismo. He cumplido *quince* años hace más de tres meses, pero es inútil mencionarle *eso* a tío Joe. Se limitaría a decirme «Vete a tu camita, muchachito», o «Entonces supongo que serás capaz de hacer ecuaciones cúbicas» o cualquier otro retruécano igualmente ruin. Ayer me pidió que le pusiera un ejemplo de proposición en A. Y yo le dije: «Todos los tíos hacen retruécanos ruines». Pienso que no le gustó. En todo caso, la cuestión no es ésa. Yo estaba contento de acompañarlos. Me encanta oír a mis tíos «despedazar la lógica», como ellos dicen; y puedo asegurarles por experiencia que su habilidad para eso es terrible.

«Eso no se infiere lógicamente de la observación que acabo de hacer» —dijo tío Jim.

«Nunca dije que así fuera —dijo tío Joe—; se trata de una *Reductio ad Absurdum*».

«¡Mi premisa menor no lleva consigo que debamos llevar con nosotros al menor!» —dijo tío Jim riéndose.

Ese es el tipo de comportamiento que adoptan cuando *yo estoy* con ellos. ¡Como si fuera muy divertido llamarme «un menor»!

Al cabo de un rato, cuando avistábamos la barbería, tío Jim empezó de nuevo. «Mi única esperanza es que esté Carr —dijo—, ¡Brown es tan torpe! Y la mano de Allen tiembla constantemente desde que tuvo aquel acceso de fiebre».

«*Seguro* que Carr está» —dijo tío Joe.

«Te apuesto seis peniques a que *no está*» —dije yo.

«Guárdate tus apuestas, apuesto muchacho —dijo tío Joe—. Quiero decir —se apresuró a aclarar, al comprender por la mueca de mi cara que su intervención no había sido muy afortunada—, quiero decir que puedo *probarlo* lógicamente. No es cuestión de *azar*».

«¡Pruébalo *lógicamente*! —se burló tío Jim—. ¡Al ataque, pues! ¡Te desafío a que lo hagas!»

«Supongamos como hipótesis de trabajo —empezó tío Joe— que Carr no está. Y veamos a dónde nos conduce esta suposición. Voy a utilizar para ello la *Reductio ad Absurdum*».

«Eso, desde luego —gruñó tío Jim—. ¡No he visto nunca un razonamiento desarrollado por ti que no terminara en una absurdidad!»

«Sin dejarme desmoralizar por tus vituperios —dijo tío Joe con tono altivo— voy a proceder a la deducción. Si Carr no está, admitirás que, si Allen tampoco está, Brown debe estar, ¿no?»

«¿Y que tiene de bueno el que esté? —dijo tío Jim—. Yo no quiero que me afeite Brown. Es demasiado torpe».

«La paciencia es una de esas cualidades inestimables...» —empezó tío Joe; pero tío Jim le cortó.

«¡Razona! —dijo—. ¡No moralices!»

«Bueno, pero ¿lo admites? persistió tío Joe. ¿Me admites que, si Carr no está se sigue de ello que, si Allen no está, Brown *tiene que* estar allí?»

«Claro que tiene que estar —dijo tío Jim—; de otro modo, no habría nadie que cuidara de la barbería».

«Vemos, entonces, que la ausencia de Carr hace entrar en juego una proposición hipotética, cuya *prótasis* es 'Allen no está' y cuya *apódosis* es 'Brown está'. Vemos también que esta proposición conserva su fuerza lógica mientras Carr no esté, ¿no?»

«Bueno, supongo que sí. Y ¿que pasa entonces?» —dijo tío Jim.

«Me admitirás también que la verdad de una proposición hipotética —quiero decir: su *validez* como *inferencia* lógica— no depende en absoluto de que su prótasis sea de hecho *verdadera*, ni siquiera de que sea *posible*. La proposición hipotética 'si tú llegaras de aquí a Londres en cinco minutos, la gente se sorprendería' sigue siendo verdadera en cuanto inferencia, tanto si puedes como si no puedes llegar a Londres en ese tiempo».

«No puedo hacerlo» —dijo tío Jim.

Hemos de considerar ahora *otra* proposición hipotética. ¿Qué es lo que me dijiste tú ayer a proposito de Allen?»

«Te dije —recordó tío Jim— que desde que tuvo el acceso de fiebre lo pone tan nervioso salir solo que siempre se lleva a Brown con él».

«Justamente —dijo tío Joe—. Entonces la proposición hipotética 'Si Allen no está, Brown no está' es siempre verdadera, ¿no?»

«Supongo que sí» —dijo tío Jim. (Parecía como si se estuviera poniendo un poco nervioso.)

«Entonces, si Carr no está, tenemos *dos* proposiciones hipotéticas, 'Si Allen no está, Brown *está*' y 'Si Allen no está, Brown *no* está' ¡Pero fíjate en que son dos proposiciones hipotéticas *incompatibles*! ¡No es *posible* que sean verdaderas a un tiempo!»

«¿No pueden?» —dijo tío Jim.

«¡Cómo van a poder! —dijo tío Joe—. ¿Cómo puede una y la misma *prótasis* probar dos *apódosis* contradictorias? Supongo que me aceptarás que las dos *apódosis*, 'Brown está' y 'Brown no está' *son* contradictorias, ¿no?»

«Sí, admite *eso*» —dijo tío Jim.

«Entonces, resumamos —dijo tío Joe—. Si Carr no está estas

dos proposiciones hipotéticas son verdaderas a un tiempo. Y sabemos que *no pueden* ser verdaderas a la vez. Lo cual es absurdo. Por tanto, Carr *no puede* estar ausente. ¡He aquí una exquisita *Reductio ad Absurdum* para usted!»

«Tío Jim parecía sumido en la más absoluta perplejidad. Pero al cabo de un rato cobró valor y empezó de nuevo. «No veo en modo alguno clara esa *incompatibilidad*. ¿Por qué no pueden ser verdaderas a la vez? Me parece que lo único que todo ello probaría es la proposición 'Allen está'. Desde luego, es claro que las apódosis de esas dos proposiciones hipotéticas —'Brown está' y 'Brown no está— son incompatibles. Pero ¿por qué no podemos presentarlo de otra manera? Por ejemplo, así: Si Allen no está, Brown *no* está. Si Carr y Allen no están *ninguno*, Brown *está*. Lo cual es absurdo. Por lo tanto, Carr y Allen no pueden estar ausentes *ambos*. Pero, puesto que Allen *está*, no veo que es lo que impide que Carr no esté».

«Mi querido pero sumamente ilógico hermano —dijo tío Joe (siempre que tío Joe comienza diciendo 'querido' su interlocutor puede tener la seguridad de que está a su merced)— ¿no te das cuenta de que estás dividiendo equivocadamente la *prótasis* y la *apódosis* de esa proposición hipotética? Su prótasis es simplemente 'Carr no está', y su *apódosis* es una especie de proposición subhipotética, 'Si Allen no está, Brown está'. Apódosis absurda, puesto que es fatalmente incompatible con esa otra proposición hipotética de la que sabemos que es siempre verdadera, 'Si Allen no está, Brown no está'. La causa de este absurdo es simplemente la hipótesis de que 'Carr no está'. De modo que sólo hay una conclusión posible: ¡*Carr está*!»

Ignoro cuánto tiempo *hubiera* podido durar esta discusión. Creo que cualquiera de ellos era capaz de argumentar durante seis horas de un tirón. Pero justo en este momento llegábamos a la barbería, y al entrar nos encontramos...

EJERCICIO 28. *Demostrar, por el método de reducción al absurdo, la expresión* '$[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$'.

EJERCICIO 29. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\frac{p \to [(q \to r) \to s]}{(q \to r) \to (p \to s)}$$

EJERCICIO 30. *Demostrar la validez del esquema anterior por el método de reducción al absurdo.*

EJERCICIO 31. *Demostrar que la expresión*

$$\{[\neg r \to \neg(p \wedge q)] \wedge (s \to p)\} \to [(s \wedge q) \to r]$$

es una ley lógica.

EJERCICIO 32. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow (q \wedge t \wedge u) \\ \neg p \\ r \leftrightarrow \neg q \\ \neg r \to t \\ \neg u \to r \\ \hline r \vee s \end{array}$$

EJERCICIO 33. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ s \to t \\ s \vee p \\ \hline r \vee t \end{array}$$

EJERCICIO 34. *Demostrar la validez de la expresión anterior por reducción al absurdo.*

EJERCICIO 35. *Demostrar que la expresión*

$$[(p \to r) \wedge (q \to s)] \to [(p \wedge q) \to (r \wedge s)]$$

es una ley lógica.

EJERCICIO 36. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\frac{(p \vee q) \to r}{(p \to r) \vee (q \to r)}$$

EJERCICIO 37. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} r \to s \\ p \vee q \\ \neg(\neg p \to s) \\ \neg p \to q \\ \hline q \wedge \neg r \end{array}$$

EJERCICIO 38. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge r \\ s \rightarrow t \\ r \rightarrow s \\ \hline q \vee t \end{array}$$

EJERCICIO 39. *Demostrar la validez del esquema anterior por el método de reducción al absurdo:*

EJERCICIO 40. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} \neg p \leftrightarrow q \\ \neg(\neg q \vee r) \\ p \vee s \\ \hline s \vee t \end{array}$$

EJERCICIO 41. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \vee \neg p \\ \hline p \rightarrow (q \wedge r) \end{array}$$

EJERCICIO 42. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ q \wedge \neg s \\ \hline \neg p \end{array}$$

EJERCICIO 43. *Demostrar la validez de la expresión anterior por el método de reducción al absurdo.*

EJERCICIO 44. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s) \\ \neg(t \wedge \neg p) \\ t \\ t \leftrightarrow q \\ \hline \neg r \rightarrow s \end{array}$$

EJERCICIO 45. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ r \rightarrow \neg p \\ s \rightarrow r \\ \neg t \rightarrow s \\ r \leftrightarrow \neg q \\ \hline t \end{array}$$

EJERCICIO 46. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia:*

$$\begin{array}{l} (p \wedge \neg q \wedge r) \rightarrow s \\ t \\ (s \wedge t) \rightarrow u \\ p \rightarrow (u \rightarrow \neg w) \\ w \\ \hline (p \wedge r) \rightarrow q \end{array}$$

EJERCICIO 47. *Demostrar la validez del esquema anterior por el método de reducción al absurdo.*

EJERCICIO 48. *Esquematizar el siguiente razonamiento (de San Agustín, en* La Ciudad de Dios*) y demostrar su validez:*

«Si me engaño, existo. El que no existe no puede engañarse; luego yo existo si me engaño.»

EJERCICIO 49. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en CELARENT):*

$$\begin{array}{l} \bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx) \\ \bigwedge x\,(Rx \rightarrow Px) \\ \hline \bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Qx) \end{array}$$

EJERCICIO 50. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en FERIO):*

$$\begin{array}{l} \bigwedge x\,(Qx \rightarrow \neg Px) \\ \bigvee x\,(Rx \wedge Qx) \\ \hline \bigvee x\,(Rx \wedge \neg Px) \end{array}$$

EJERCICIO 51. *Demostrar la validez del siguiente esquema inferencia (que corresponde a un silogismo en CESARE):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$$
$$\bigwedge x(Rx \rightarrow Qx)$$
$$\overline{\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Px)}$$

EJERCICIO 52. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en CAMESTRES):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$$
$$\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Qx)$$
$$\overline{\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Px)}$$

EJERCICIO 53. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en FESTINO):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$$
$$\bigvee x(Rx \wedge Qx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)}$$

EJERCICIO 54. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en BAROCO):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$$
$$\bigvee x(Rx \wedge \neg Qx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)}$$

EJERCICIO 55. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en DISAMIS):*

$$\bigvee x(Px \wedge Qx)$$
$$\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge Qx)}$$

EJERCICIO 56. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en DATISI):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$$
$$\bigvee x(Px \wedge Rx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge Qx)}$$

EJERCICIO 57. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en BOCARDO):*

$$\bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$$
$$\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge \neg Qx)}$$

EJERCICIO 58. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en FERISON):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$$
$$\bigvee x(Px \wedge Rx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge \neg Qx)}$$

EJERCICIO 59. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en CALEMES):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$$
$$\bigwedge x(Qx \rightarrow \neg Rx)$$
$$\overline{\bigwedge x(Rx \rightarrow \neg Px)}$$

EJERCICIO 60. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en DIMATIS):*

$$\bigvee x(Px \wedge Qx)$$
$$\bigwedge x(Qx \rightarrow Rx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge Px)}$$

EJERCICIO 61. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia (que corresponde a un silogismo en FRESISON):*

$$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$$
$$\bigvee x(Qx \wedge Rx)$$
$$\overline{\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)}$$

EJERCICIO 62. *Se trata de un ejercicio múltiple. En efecto: hasta ahora hemos presentado como ejercicios las demostraciones de la validez de los siguientes modos silogísticos:*

De la primera figura: *Celarent* y *Ferio*.
De la segunda figura: *Cesare*, *Camestres*, *Festino* y *Baroco*.
De la tercera figura: *Disamis*, *Datisi*, *Bocardo* y *Ferison*.
De la cuarta figura: *Calemes*, *Dimatis*, *Fresison*.

Habida cuenta de que las derivaciones de los esquemas de inferencia correspondientes a los modos *Barbara* y *Darii*, de la primera figura, habían sido ya utilizados con anterioridad a título de ilustración, sólo quedarían los modos siguientes:

Darapti y *Felapton*, de la tercera figura.
Baralipton y *Fesapo*, de la cuarta figura.

Su ausencia se debe a que los esquemas correspondientes a estos modos no son derivables como tales en una lógica en la que no se acepte —y en la lógica *clásica* actual no se acepta— que el cuantificador universal tenga alcance existencial, es decir, en una lógica en la que la expresión '$\vee x(Px \wedge Qx)$' no sea derivable de '$\wedge x(Px \rightarrow Qx)$'. En la lógica clásica actual —a la que este libro es una introducción— no serían válidos aquellos modos silogísticos en los que de dos premisas universales se deriva una conclusión particular, como ocurre en los cuatro citados.

Ahora bien: esos cuatro modos sí serían derivables si añadiéramos como tercera premisa una afirmación de existencia. El ejercicio —cuádruple, por tanto— consiste en demostrar la validez de esos cuatro modos silogísticos añadiendo en cada caso la premisa existencial («ontológica») necesaria.

EJERCICIO 63. *Esquematizar la siguiente inferencia (de la que es autor Lewis Carroll) y demostrar su validez:*

Ningún ánade baila el vals
Ningún oficial declina nunca una invitación a bailar el vals
Todas mis aves de corral son ánades

Mis aves de corral no son oficiales

EJERCICIO 64. *Demostrar la validez del siguiente esquema:*

$$\wedge x(Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow \wedge x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

EJERCICIO 65. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) y derivar su conclusión:*

Todos los miembros de la Cámara de los Comunes tienen perfecto dominio de sí mismos
Ningún parlamentario que use corona de nobleza participaría en una carrera de burros
Todos los miembros de la Cámara de los Lores usan corona de nobleza

---

Ningún miembro del Parlamento participaría en una carrera de burros a menos que tuviera un perfecto dominio de sí mismo

EJERCICIO 66. *Esquematizar la siguiente inferencia (cuyo autor es Lewis Carroll) y demostrar su validez:*

Todos los colibríes tienen vivos colores
Ningún pájaro de gran tamaño se alimenta de miel
Los pájaros que no se alimentan de miel tienen colores apagados

---

Todos los colibríes son de pequeño tamaño

EJERCICIO 67. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) y derivar su conclusión:*

Solamente las personas bien educadas están suscritas al *Times*
Ningún puercoespín sabe leer
Las personas bien educadas saben leer

Ningún puercoespín está suscrito al *Times*

EJERCICIO 68. *Dice Stephen Körner en su libro sobre Kant*[4]*:*

«El argumento de Hume y de los positivistas lógicos contra la metafísica se apoya en dos enunciados: uno de ellos expresa una distinción lógica, y el otro, una definición. La distinción consiste en decir que las proposiciones metafísicas no son ni proposiciones empíricas ni proposiciones analíticas..

La definición proporciona el significado del término 'proposición con sentido': proposición con sentido es aquella que es o empírica o analítica. Si estamos de acuerdo en la distinción y aceptamos la definición, hemos de concluir que las proposiciones metafísicas carecen de sentido.»

EJERCICIO 69. *Demostrar la validez del siguiente esquema:*

$$\vee x(Px \vee Qx) \leftrightarrow (\vee x\, Px \vee \vee x\, Qx)$$

EJERCICIO 70. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) y derivar la conclusión:*

Ningún poema interesante es mal recibido entre gentes de buen gusto
Ningún poema moderno está libre de afectación
Todos sus poemas de usted versan acerca de pompas de jabón
Ningún poema afectado goza de aceptación entre gentes de buen gusto
Ningún poema antiguo versa acerca de pompas de jabón

Todos sus poemas carecen de interés

[4] S. Körner, *Kant*. Harmondsworth, Penguin Books, 1955, pág. 17. V. C. de I. Zapata. Madrid, Alianza Editorial, 1977.

EJERCICIO 71. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) y derivar su conclusión:*

Todos los animales que no cocean son flemáticos
Los asnos no tienen cuernos
Un búfalo puede siempre lanzarlo a uno contra una puerta
Ningún animal que cocea es fácil de engullir
Ningún animal sin cuernos puede lanzarlo a uno contra una puerta
Todos los animales son excitables, excepto los búfalos

Los asnos no son fáciles de engullir

EJERCICIO 72. *Esquematizar la siguiente inferencia*[5] *y demostrar su validez:*

En el siglo XIX un demócrata podía ser tanto liberal como socialista. Los liberales aceptaban la revolución industrial y defendían la institución de la propiedad privada de los medios de producción, el establecimiento de una economía de mercado autorregulada y la conversión del trabajo en mercancía. Los socialistas aceptaban también la revolución industrial, pero rechazaban esos tres puntos de la ideología liberal. Los conservadores, por su parte, rechazaban la revolución industrial. De ello se desprende que ni los liberales ni los socialistas eran conservadores, que ningún liberal era socialista y que ningún conservador era demócrata.

EJERCICIO 73. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) y derivar su conclusión:*

Ningún tiburón duda nunca de su buena preparación
Un pez que no sea capaz de bailar un minuto es despreciable
Ningún pez está seguro de su buena preparación a menos que tenga tres filas de dientes
Todos los peces, excepto los tiburones, son amables con los niños
Ningún pez obeso puede bailar un minuto
Un pez con tres filas de dientes no es despreciable

Todos los peces obesos son amables con los niños

[5] Inspirada en un texto del libro de G. Lichtheim, *Breve historia del socialismo*. V. cast. de J. Rubio. Madrid, Alianza Editorial, 1975, págs. 36-7.

EJERCICIO 74. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) y derivar su conclusión:*

Los animales se irritan siempre mortalmente si no les presto atención
Los únicos animales que me pertenecen a mí están en ese prado
Ningún animal puede adivinar un acertijo a menos que hay sido adecuadamente instruido en un colegio con internado
Ningún animal de los que están en este prado es un tejón
Cuando un animal está mortalmente irritado corre de un lado para otro salvajemente y gruñe
Nunca presto atención a un animal, a no ser que me pertenezca
Ningún animal que haya sido adecuadamente instruido en un colegio con internado corre de un lado para otro salvajemente y gruñe

---

Ningún tejón puede adivinar un acertijo

EJERCICIO 75. *Demostrar la validez de la inferencia contenida en el siguiente pasaje de la Biblia*[6]*:*

«Yavé habló a Moisés y Arón diciendo: «Hablad a los hijos de Israel y decidles: He aquí los animales que comeréis de entre las bestias de la tierra. Todo animal de casco partido y pezuña hendida y que rumie lo comeréis; pero no comeréis los que sólo rumian o sólo tienen partida la pezuña. El camello, que rumia, pero no tiene partida la pezuña, será inmundo para vosotros; el conejo, que rumia y no tiene partida la pezuña, es inmundo; la liebre, que rumia y no tiene partida la pezuña, es inmunda; el cerdo, que tiene la pezuña hendida y no rumia, es inmundo para vosotros.»

EJERCICIO 76. *Demostrar que la siguiente expresión es un esquema válido:*

$$\bigvee x \bigwedge y\, Pxy \rightarrow \bigwedge y \bigvee x\, Pxy$$

EJERCICIO 77. *En el* test *de Burt se pregunta a los niños: «Edith es más rubia que Suzanne y al mismo tiempo más morena que Lili. ¿Cuál de las tres es la que tiene el cabello más oscuro?» Hallar la solución por métodos formales.*

EJERCICIO 78. *Demostrar la validez del esquema*

$$\bigvee x \bigvee y\, Pxy \leftrightarrow \bigvee y \bigvee x\, Pxy$$

[6] *Levítico*, Tercera parte, 11, 1-8. Seguimos en líneas generales la versión de Nácar-Colunga.

EJERCICIO 79. *Demostrar la validez de la siguiente inferencia*[7]:

El hombre puro ama todo lo que es puro

El hombre puro se ama a sí mismo

EJERCICIO 80. *Demostrar la validez del siguiente esquema de inferencia*:

$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$
$\neg Qa$
$b = a$

$\neg Pb$

EJERCICIO 81. *Demostrar la validez de la siguiente inferencia*:

Lancelot ama a la Reina Ginebra
Lancelot no ama a ninguno de sus amigos
El Rey Arturo es amigo de Lancelot
Los amigos de Lancelot odian a aquellos a quienes Lancelot ama

---

El Rey Arturo odia a la Reina Ginebra

EJERCICIO 82. *Demostrar que*

$$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,\{[(x = y \wedge (y = z)] \rightarrow (x = z)\}$$ [8]

EJERCICIO 83. *Demostrar la validez de la siguiente inferencia*:

Todos los filósofos se han preguntado qué es la filosofía
Todos los que se han preguntado qué es filosofía han dado en la locura
Nietzsche es un filósofo
El Padre Ceballos no acabó loco

Nietzsche y el Padre Ceballos no son la misma persona

EJERCICIO 84. *Demostrar la validez de la siguiente inferencia*:

El autor de *La Tempesta di Mare* era veneciano
El autor de *Il Gardellino* es Vivaldi
El autor de *La Tempesta di Mare* es el autor de *Il Gardellino*

Vivaldi era veneciano

[7] La premisa es del Maestro Eckhart. La conclusión, de Carlos Garland.
[8] Se trata, como es obvio, de demostrar que la relación de identidad es transitiva.

EJERCICIO 85. *Esquematizar la siguiente inferencia (obra de Lewis Carroll) en términos de puros predicados monádicos y en términos de predicados poliádicos, y derivar su conclusión en ambos casos*:

Todos los escritores que comprenden la naturaleza humana son inteligentes
Nadie es verdadero poeta a menos que pueda mover los corazones de los hombres
Shakespeare escribió *Hamlet*
Ningún escritor que no comprenda la naturaleza humana puede mover los corazones de los hombres
Nadie sino un verdadero poeta podía haber escrito *Hamlet*

Shakespeare era inteligente

2. Soluciones

Al ejercicio 1.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	P
2.	p	P
3.	q	
4.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 2, 3
5.	r	RE $\rightarrow$, 4, 1
6.	$q \rightarrow r$	RI $\rightarrow$, 3, 5

Al ejercicio 2.

Demostración:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$r \vee s$	P
3.	$s \rightarrow \neg q$	P
4.	$\neg r$	P
5.	s	RIA_1, 2, 4
6.	$\neg q$	RE $\rightarrow$, 3, 5
7.	$\neg p$	MT, 1, 6

Al ejercicio 3.

Demostración:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$r \vee s$	P
3.	$s \rightarrow \neg q$	P
4.	$\neg r$	P
5.	$\neg\neg p$	
6.	p	RE $\neg$, 5
7.	q	RE $\rightarrow$, 1, 6
8.	$q \rightarrow \neg s$	RContr. $\rightarrow$, 3
9.	$\neg s$	RE $\rightarrow$, 8, 7
10.	s	RIA$_1$, 2, 4
11.	$s \wedge \neg s$	RI $\wedge$, 10, 9
12.	$\neg\neg\neg p$	RI $\neg$, 5
13.	$\neg p$	RE $\neg$, 12

Al ejercicio 4.

Glosario

p = 'lo Uno está en movimiento'
q = 'lo Uno sufre un movimiento sin cambio en el estado'
r = 'lo Uno sufre un movimiento de alteración'
s = 'lo Uno rota sobre sí mismo'
t = 'lo Uno cambia de un lugar a otro'

Esquematización

$p \rightarrow (q \vee r)$
$\neg r$
$q \rightarrow (s \vee t)$
$\neg (s \vee t)$

$\neg p$

Derivación

1.	$p \rightarrow (q \vee r)$	P
2.	$\neg r$	P
3.	$q \rightarrow (s \vee t)$	P
4.	$\neg (s \vee t)$	P
5.	$\neg q$	MT, 3, 4
6.	$\neg q \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 5, 2
7.	$\neg (q \vee r)$	RDf $\wedge$, 6
8.	$\neg p$	MT, 1, 7

Al ejercicio 5.

Demostración:

1.	$r \rightarrow s$	P
2.	$p \vee q$	P
3.	$\neg (\neg p \rightarrow s)$	P
4.	$\neg p \wedge \neg s$	RDf. $\rightarrow$, 3
5.	$\neg p$	RE $\wedge$, 4
6.	q	RIA$_1$, 2, 5
7.	$\neg s$	RE $\wedge$, 4
8.	$\neg r$	MT, 1, 7
9.	$q \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 6, 8

Al ejercicio 6.

Derivación (directa)

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$r \rightarrow p$	P
3.	$\neg r \rightarrow \neg t$	P
4.	$\neg (s \wedge \neg r)$	P
5.	$t \vee s$	P
6.	t	
7.	$t \rightarrow r$	RContr $\rightarrow$, 3
8.	r	RE $\rightarrow$, 6, 7
9.	p	RE $\rightarrow$, 2, 8
10.	q	RE $\rightarrow$, 1, 9
11.	$q \vee u$	RI $\vee$, 10
12.	s	
13.	$s \rightarrow r$	RDf. $\wedge$, 4
14.	r	RE $\rightarrow$, 12, 13
15.	$r \rightarrow q$	RTr $\rightarrow$, 2, 1
16.	q	RTr $\rightarrow$, 2, 1
17.	$q \vee u$	RI $\vee$, 16
18.	$q \vee u$	RE $\vee$, 5, 6-11, 12-17

Otra forma de derivación directa

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$r \rightarrow p$	P
3.	$\neg r \rightarrow \neg t$	P
4.	$\neg (s \wedge \neg r)$	P
5.	$t \vee s$	P

6.	$t \to r$	RContr $\to$, 3
7.	$t \to p$	RTr $\to$, 6, 2
8.	$t \to q$	RTr $\to$, 7, 1
9.	$s \to r$	RDf $\wedge$, 4
10.	$s \to p$	RTr $\to$, 9, 2
11.	$s \to q$	RTr $\to$, 10, 1
12.	t	
13.	q	RE $\to$, 8, 12
14.	$q \vee u$	RI $\vee$, 13
15.	s	
16.	q	RE $\to$, 11, 15
17.	$q \vee u$	RI $\vee$, 16
18.	$q \vee u$	RE $\vee$, 5, 12-14, 15-17

Al ejercicio 7.

Demostración:

1.	$p \to (q \to r)$	P
2.	q	P
3.	p	
4.	$q \to r$	RE $\to$, 1, 3
5.	r	RE $\to$, 4, 2
6.	$p \to r$	RI $\to$, 3-5

Al ejercicio 8.

Derivación (directa)

1.	$p \leftrightarrow (q \vee r)$	P
2.	$p \to s$	P
3.	q	P
4.	$(q \vee r) \to p$	RD $\leftrightarrow$, 1
5.	$(q \vee r) \to s$	RTr $\to$, 4, 2
6.	$q \vee r$	RI $\vee$, 3
7.	s	RE $\to$, 5, 6

Derivación (por reducción al absurdo)

1.	$p \leftrightarrow (q \vee r)$	P
2.	$p \to s$	P

3.	q	P
4.	$\neg s$	
5.	$\neg p$	MT, 2, 4
6.	$\neg (q \vee r)$	$RE_4 \leftrightarrow$, 1, 5
7.	$\neg q \wedge \neg r$	RDf $\vee$, 6
8.	$\neg q$	RE $\wedge$, 7
9.	$q \wedge \neg q$	RI $\wedge$, 3, 8
10.	$\neg\neg s$	RI $\neg$, 4-9
11.	s	RE $\neg$, 10

Al ejercicio 9.

Parece que podría dársele a la argumentación de Wittgenstein la siguiente forma:

> «Si de la inexistencia del mundo no se siguiera la inexistencia de la lógica, entonces la inexistencia de ésta se seguiría de la existencia de aquel.»

Glosario

p = 'hay un mundo'
q = 'hay una lógica'

Esquematización

$$\frac{\neg(\neg p \to \neg q)}{(p \to \neg q)}$$

Derivación

1.	$\neg(\neg p \to \neg q)$	P
2.	$\neg(p \to \neg q)$	
3.	$\neg p \wedge q$	RDf. $\to$, 1
4.	$p \wedge q$	RDf. $\to$, 2
5.	$\neg p$	RE $\wedge$, 3
6.	p	RE $\wedge$, 4
7.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$, 5, 6
8.	$\neg\neg(p \to \neg q)$	RI $\neg$, 2-7
9.	$(p \to \neg q)$	RE $\neg$, 8

Al ejercicio 10.

Derivación (directa)

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	P
2.	$\neg(p \vee r) \rightarrow s$	P
3.	$p \rightarrow q$	P
4.	$\neg s$	
5.	$p \vee r$	MT, 2, 4
6.	p	
7.	q	RE $\rightarrow$, 3, 6
8.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 6, 7
9.	r	RE $\rightarrow$, 1, 8
10.	r	
11.	r	RRfl $\rightarrow$, 10
12.	r	RE $\vee$, 5, 6-9, 10-11
13.	$\neg s \rightarrow r$	RI $\rightarrow$, 4-12

Derivación por reducción al absurdo

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	P
2.	$\neg(p \vee r) \rightarrow s$	P
3.	$p \rightarrow q$	P
4.	$\neg(\neg s \rightarrow r)$	
5.	$\neg s \wedge \neg r$	RDf $\rightarrow$, 4
6.	$\neg s$	RE $\wedge$, 5
7.	$\neg r$	RE $\wedge$, 5
8.	$\neg(p \wedge q)$	MT, 1, 7
9.	$p \vee r$	MT, 2, 6
10.	$\neg p \vee \neg q$	RDf $\wedge$, 8
11.	$p \rightarrow \neg q$	Rdf $\vee$, 10
12.	p	RIA_2, 7, 9
13.	$\neg p$	IT, 3, 11
14.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$, 12, 13
15.	$\neg\neg(\neg s \rightarrow r)$	RI $\neg$, 4-14
16.	$(\neg s \rightarrow r)$	RE $\neg$, 15

Al ejercicio 11.

Sí. La inferencia que hemos fingido tendría —suponiendo que 'p' significa 'es un azar' y 'q', 'es un genio'— el siguiente esquema:

$$\frac{p \vee q}{\neg p \rightarrow q}$$

Y la derivación sería sencillamente ésta:

1.	$p \vee q$	P
2.	$\neg p \rightarrow q$	RDf $\vee$, 1

Al ejercicio 12.

Demostración:

1.	$s \leftrightarrow t$	P
2.	$t \vee p$	P
3.	$s \rightarrow \neg w$	P
4.	w	P
5.	$w \rightarrow \neg s$	RContr. $\rightarrow$, 3
6.	$\neg s$	RE $\rightarrow$, 4, 5
7.	$\neg t$	$RE_4 \leftrightarrow$, 1, 6
8.	p	RIA_1, 2, 7

Al ejercicio 13.

Demostración:

1.	$s \leftrightarrow t$	P
2.	$t \vee p$	P
3.	$s \rightarrow \neg w$	P
4.	w	P
5.	$\neg p$	
6.	t	RIA_2, 2, 5
7.	s	$RE_3 \leftrightarrow$, 1, 6
8.	$w \rightarrow \neg s$	RContr. $\rightarrow$, 3
9.	$\neg s$	RE $\rightarrow$, 4, 8
10.	$s \wedge \neg s$	RI $\wedge$, 7, 9
11.	$\neg\neg p$	RI $\neg$, 5-10
12.	p	RE $\neg$, 11

Al ejercicio 14.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow$	P
2.	$(r \wedge s) \rightarrow t$	P

3.	$p \wedge q \wedge s$	
4.	p	RE $\wedge$, 3
5.	q	RE $\wedge$, 3
6.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 4, 5
7.	r	RE $\rightarrow$, 1, 6
8.	s	RE $\wedge$, 3
9.	$r \wedge s$	RI $\wedge$, 7, 8
10.	t	RE $\rightarrow$, 2, 9
11.	$(p \wedge q \wedge s) \rightarrow t$	RI $\rightarrow$, 3-10

Al ejercicio 15.

Demostración:

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	P
2.	q	
3.	p	
4.	$q \rightarrow r$	RE $\rightarrow$, 1, 3
5.	r	RE $\rightarrow$, 4, 2
6.	$p \rightarrow r$	RI $\rightarrow$, 3-5
7.	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	RI $\rightarrow$, 2-6

Al ejercicio 16.

La argumentación del doctor Asquith no es una argumentación. Son, por lo menos, seis argumentaciones. Las presentaremos sucesivamente extrayendo en cada caso la conclusión que, para mayor emoción, el doctor Asquith se abstiene de formular:

I.

1.	$p \vee q$	P
2.	$p \rightarrow r$	P
3.	$\neg r$	P
4.	$\neg p$	MT, 2, 3
5.	q	RIA_1, 1, 4

II.

1.	$p \rightarrow (s \wedge t)$	P
2.	s	P
3.	$\neg t$	P
4.	$s \wedge \neg t$	RI $\wedge$, 2, 3
5.	$\neg p$	MT, 1, 4

III.

1.	$q \rightarrow \neg r$	P
2.	$\neg r$	P
3.		[9]

IV.

1.	$q \rightarrow (s' \wedge t')$	P
2.	t'	P
3.	$\neg s'$	P
4.	$\neg s' \wedge t'$	RI $\wedge$, 2, 3
5.	$\neg q$	MT, 1, 4

V.

1.	$q \rightarrow u$	P
2.	$\neg u$	P
3.	$\neg q$	MT, 1, 2

VI.

1.	$\neg m \rightarrow p$	P
2.	$\neg m$	P
3.	p	RE $\rightarrow$, 1, 2[10]

Al ejercicio 17.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	P
2.	$p \wedge \neg r$	
3.	$\neg r$	RE $\wedge$, 2
4.	$\neg (p \wedge q)$	MT, 1, 3
5.	$\neg p \vee \neg q$	Df. $\wedge$, 4
6.	p	RE $\wedge$, 2
7.	$\neg q$	RIA_1, 5, 6
8.	$(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q$	RI $\rightarrow$, 2-7

[9] Nada se concluye formalmente. Concluir 'q' sería incurrir en la falacia de afirmación de consecuente. Podríamos, evidentemente, concluir '$q \vee \neg q$', lo cual es tanto, sin embargo, como no concluir nada.

[10] La consideración conjunta de los resultados de las seis argumentaciones no conduce a nada concreto. La prueba está en que el éxito obtenido por el Doctor Asquith —la identificación y captura del culpable— no ha sido un fruto de la aplicación de la lógica formal, sino de la debilidad del sistema nervioso de Lester— unida a los escasos conocimientos que éste, a lo que parece, poseía acerca de la teoría de la validez formal de la inferencia—, así como de la oportunidad y presteza con que actuaron las fuerzas del orden.

9.	$[(p \wedge q) \to r] \to [(p \wedge \neg r) \to \neg q]$	RI $\to$, 1-8
10.	$(p \wedge \neg r) \to \neg q$	P
11.	$p \wedge q$	
12.	q	RE $\wedge$, 11
13.	$\neg (p \wedge \neg r)$	MT, 10, 12
14.	$p \to r$	Df. $\to$, 13
15.	p	RE $\wedge$, 11
16.	r	RE $\to$, 14, 15
17.	$(p \wedge q) \to r$	RI $\to$, 11-16
18.	$[(p \wedge \neg r) \to \neg q] \to [(p \wedge q) \to r]$	RI $\to$, 10-17
19.	$[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [(p \wedge \neg r) \to \neg q]$	RI $\leftrightarrow$, 9, 18

Al ejercicio 18.

Demostración:

1.	$p \to (p \to q)$	P
2.	p	
3.	$p \to q$	RE $\to$, 1, 2
4.	q	RE $\to$, 3, 2
5.	$p \to q$	RI $\to$, 2-4

Al ejercicio 19.

Demostración:

1.	$\neg p \to p$	P
2.	$\neg p$	
3.	p	RE $\to$, 1, 2
4.	$p \wedge \neg p$	RI $\wedge$, 3, 2
5.	$\neg\neg p$	RI $\neg$, 2, 4
6.	p	RE $\neg$, 5

Al ejercicio 20.

Derivación:

1.	$p \to \neg q$	P
2.	$\neg q \to (\neg r \wedge \neg s)$	P
3.	$(r \vee s) \to t$	P
4.	$t \to q$	P
5.	$p \to (\neg r \wedge \neg s)$	RTr $\to$, 1, 2 [11]

[11] Como el lector habrá podido observar, sobran, para obtener el enunciado buscado,

Puesto que así ha resultado todo demasiado fácil, compliquemos ligeramente la derivación evitando el recurso a reglas auxiliares:

1.	$p \to \neg q$	P
2.	$\neg q \to (\neg r \wedge \neg s)$	P
3.	p	
4.	$\neg q$	RE $\to$, 1, 3
5.	$\neg r \wedge \neg s$	RE $\to$, 2, 4
6.	$p \to (\neg r \wedge \neg s)$	RI, $\to$, 3-5

Podríamos también utilizar las reglas derivadas no para abreviar, sino para dar un rodeo y hacer prácticas:

1.	$p \to \neg q$	P
2.	$\neg q \to (\neg r \wedge \neg s)$	P
3.	$(r \vee s) \to q$	RContr $\to$, 2
4.	$q \to \neg p$	RContr $\to$, 1
5.	$(r \vee s) \to \neg p$	RTr $\to$, 3, 4
6.	$p \to \neg (r \vee s)$	RContr $\to$, 5
7.	$p \to (\neg r \wedge \neg s)$	Df. $\vee$, 6

Intentémoslo también, para mayor complejidad, por el método de reducción al absurdo:

1.	$p \to \neg q$	P
2.	$\neg q \to (\neg r \wedge \neg s)$	P
3.	$(r \vee s) \to t$	P
4.	$t \to q$	P
5.	$\neg [p \to (\neg r \wedge \neg s)]$	
6.	$p \wedge \neg(\neg r \wedge \neg s)$	Df. $\to$, 5
7.	$p \wedge (r \vee s)$	Df $\wedge$, 6
8.	$(p \wedge r) \vee (p \wedge s)$	RDstr $\wedge$ por $\vee$, 7
9.	$p \wedge r$	
10.	p	RE $\wedge$, 9
11.	$\neg q$	RE $\to$, 1, 10
12.	r	RE $\wedge$, 9
13.	$r \vee s$	RI $\vee$, 12
14.	t	RE $\to$, 3, 13
15.	q	RE $\to$, 4, 14
16.	$q \wedge \neg q$	RI $\wedge$, 11, 15

las premisas 3 y 4. No son éstas, en efecto, sino glosas de la premisa 2. Su valor no es deductivo, sino persuasivo: las introduce Parménides con vistas a persuadir a Aristóteles de que acepte esa premisa 2.

17.	$p \wedge s$	
18.	p	RE $\wedge$, 17
19.	$\neg q$	RE $\rightarrow$, 1, 18
20.	s	RE $\wedge$, 17
21.	$r \vee s$	RI $\vee$, 20
22.	t	RE $\rightarrow$, 3, 21
23.	q	RE $\rightarrow$, 4, 22
24.	$q \wedge \neg q$	RI $\wedge$, 19, 23
25.	$q \wedge \neg q$	RE $\vee$, 8, 9-16, 17-24
26.	$\neg\neg [p \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)]$	RI $\neg$, 5-25
27.	$p \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$	RE $\neg$, 26

Al ejercicio 21.

Demostración directa:

1.	$r \rightarrow p$	P
2.	$\neg q \rightarrow \neg r$	P
3.	$s \rightarrow q$	P
4.	$(p \wedge q) \rightarrow t$	P
5.	$\neg s \vee p$	P
6.	$r \vee s$	
7.	r	
8.	p	RE $\rightarrow$, 1, 7
9.	$r \rightarrow q$	RContr $\rightarrow$, 2
10.	q	RE $\rightarrow$, 7, 9
11.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 8, 10
12.	t	RE $\rightarrow$, 4, 11
13.	s	
14.	q	RE $\rightarrow$, 3, 13
15.	p	RIA_1, 5, 13
16.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 14, 15
17.	t	RE $\rightarrow$, 4, 16
18.	t	RE $\vee$, 6-17
19.	$(r \vee s) \rightarrow t$	RI $\rightarrow$, 6-18

Demostración por reducción al absurdo:

1.	$r \rightarrow p$	P
2.	$\neg q \rightarrow \neg r$	P

3.	$s \rightarrow q$	P
4.	$(p \wedge q) \rightarrow t$	P
5.	$\neg s \vee p$	P
6.	$\neg [(r \vee s) \rightarrow t]$	
7.	$(r \vee s) \wedge \neg t$	Df $\rightarrow$, 6
8.	$(r \wedge \neg t) \vee (s \wedge \neg t)$	RDstr $\wedge$ por $\vee$, 7
9.	$(r \wedge \neg t)$	
10.	r	RE $\wedge$, 9
11.	$\neg t$	RE $\wedge$, 9
12.	p	RE $\rightarrow$, 1, 10
13.	q	MT, 2, 10
14.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 12, 13
15.	t	RE $\rightarrow$, 4, 14
16.	$t \wedge \neg t$	RI $\wedge$, 11, 15
17.	$s \wedge \neg t$	
18.	s	RE $\wedge$, 17
19.	$\neg t$	RE $\wedge$, 17
20.	q	RE $\rightarrow$, 3, 18
21.	p	RIA_1, 5, 18
22.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 20, 21
23.	t	RE $\rightarrow$, 4, 22
24.	$t \wedge \neg t$	RI $\wedge$, 19, 23
25.	$t \wedge \neg t$	RE $\vee$, 8, 9-16, 17-24
26.	$(r \vee s) \rightarrow t$	RI $\neg$, 6-25

Al ejercicio 22.

Demostración:

1.	$(q \vee \neg s) \rightarrow t$	P
2.	$\neg q \rightarrow r$	P
3.	$p \rightarrow \neg s$	P
4.	$t \rightarrow s$	P
5.	p	
6.	$\neg s$	RE $\rightarrow$, 3, 5
7.	$\neg t$	MT, 4, 6
8.	$\neg (q \vee \neg s)$	MT, 1, 7
9.	$\neg q \wedge \neg\neg s$	Rdf $\vee$, 8
10.	$\neg q$	RE $\wedge$, 9
11.	r	RE $\rightarrow$, 2, 10
12.	$p \rightarrow r$	RI $\rightarrow$, 5-11

Al ejercicio 23.

Demostración:

1.	$(q \vee \neg s) \rightarrow t$	P
2.	$\neg q \rightarrow r$	P
3.	$p \rightarrow \neg s$	P
4.	$t \rightarrow s$	P
5.	$\neg (p \rightarrow r)$	
6.	$p \wedge \neg r$	RDf $\rightarrow$, 5
7.	p	RE $\wedge$, 6
8.	$\neg r$	RE $\wedge$, 6
9.	$\neg s$	RE $\rightarrow$, 3, 7
10.	$q \vee \neg s$	RI $\vee$, 9
11.	t	RE $\rightarrow$, 1, 10
12.	$\neg t$	MT, 4, 9
13.	$t \wedge \neg t$	RI $\wedge$, 11, 12
14.	$\neg\neg (p \rightarrow r)$	RI $\neg$, 5-13
15.	$p \rightarrow r$	RE $\neg$, 14

Otra posibilidad de reducción al absurdo discurriría del modo siguiente: La derivación sería idéntica a la anterior hasta el paso 9, continuendo luego así:

10.	$\neg t$	MT, 4, 9
11.	$\neg (q \vee \neg s)$	MT, 1, 10
12.	$\neg q \wedge \neg\neg s$	RDf $\vee$, 11
13.	$\neg q$	RE $\wedge$, 12
14.	$\neg\neg q$	MT, 2, 8
15.	q	RE $\neg$, 14
16.	$q \wedge \neg q$	RI $\wedge$, 15, 13
17.	$\neg\neg (p \rightarrow r)$	RI $\neg$, 5-16
18.	$p \rightarrow r$	RE $\neg$, 17

Al ejercicio 24.

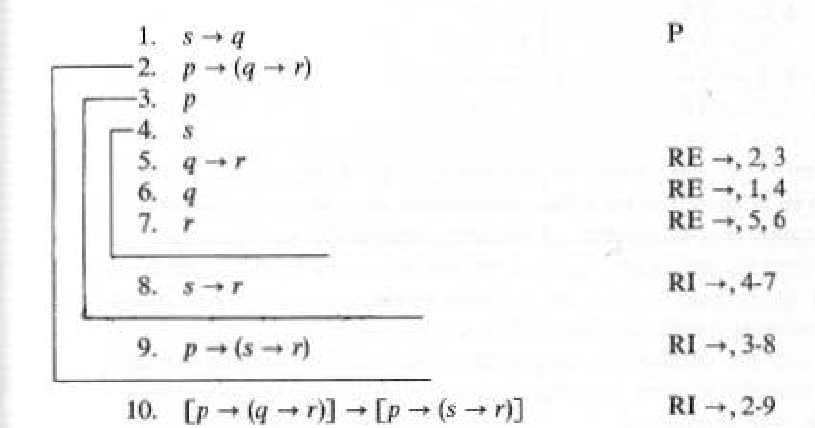
Demostración:

1.	$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$	P
2.	$\neg (\neg p \vee \neg r)$	P
3.	$\neg t \rightarrow \neg (p \wedge s)$	P
4.	$p \wedge r$	RDf $\vee$, 2
5.	p	RE $\wedge$, 4

6.	$p \vee q$	RI $\vee$, 5
7.	$r \wedge s$	RE $\rightarrow$, 1, 6
8.	s	RE $\wedge$, 7
9.	$p \wedge s$	RI $\wedge$, 5, 8
10.	$(p \wedge s) \rightarrow t$	RContr. $\rightarrow$, 3
11.	t	RE $\rightarrow$, 9, 10

Al ejercicio 25.

Demostración:



1.	$s \rightarrow q$	P
2.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
3.	p	
4.	s	
5.	$q \rightarrow r$	RE $\rightarrow$, 2, 3
6.	q	RE $\rightarrow$, 1, 4
7.	r	RE $\rightarrow$, 5, 6
8.	$s \rightarrow r$	RI $\rightarrow$, 4-7
9.	$p \rightarrow (s \rightarrow r)$	RI $\rightarrow$, 3-8
10.	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (s \rightarrow r)]$	RI $\rightarrow$, 2-9

Al ejercicio 26.

Derivación[12]*:*

1.	$p \wedge \neg p$	P
2.	p	RE $\wedge$, 1
3.	$\neg p$	RE $\wedge$, 1
4.	$p \vee q$	RI $\vee$, 2
5.	q	RIA_1, 3, 4

Al ejercicio 27.

Dos son las argumentaciones que cabe distinguir en esta historia. La principal es la que efectúa Tío Joe. Si esquematizáramos el enunciado 'Carr está' por 'p', el enunciado 'Allen está' por 'q' y el enunciado

[12] Esta derivación no tiene nada de inocente. Antes bien, esta derivación muestra que de una contradicción se sigue cualquier cosa («*Ex contradictione sequitur quodlibet*», como decían los lógicos medievales).

'Brown está' por 'r', diríamos que esa argumentación tiene la siguiente forma:

1.	$\neg p \to (\neg q \to r)$	P
2.	$\neg p \to (\neg q \to \neg r)$	P
3.	p	RI $\neg$, 1, 2

Ahora bien: la argumentación de Tío Joe sólo será válida en el caso de que '$\neg q \to r$' y '$\neg q \to \neg r$' sean expresiones contradictorias. Si así fuera, podríamos aplicar la regla

$$\frac{\begin{array}{l} X \\ Y \wedge \neg Y \end{array}}{\neg X}$$ [13]

y concluir '$\neg\neg p$' o, lo que es lo mismo, 'p' (='Carr está').

Pero es el caso que esas dos expresiones no son contradictorias, como puede comprobar fácilmente el lector comparando sus tablas de verdad. No es correcto, por tanto, aplicar en este contexto la Regla de Introducción de la Negación. No ha habido reducción de '$\neg p$' al absurdo. La argumentación de Tío Joe es falaz.

No así, en cambio, la argumentación de Tío Jim, a pesar de la escasa convicción que despliega al formularla. Su razonamiento tiene, en efecto, esta estructura:

1.	$\neg q \to \neg r$	P
2.	$(\neg p \wedge \neg q) \to r$	P
3.	$p \vee q$ [14]	

Y es válido:

1.	$\neg q \to \neg r$	P
2.	$(\neg p \wedge \neg q) \to r$	P
3.	$q \vee \neg r$	Df $\to$, 1
4.	q	
5.	$p \vee q$	RI $\vee$, 4

[13] O, formulada de otra manera,

$$\frac{\begin{array}{l} X \to Y \\ X \to \neg Y \end{array}}{\neg X}$$

[14] «Por lo tanto» —dice Tío Jim— «Carr y Allen no pueden estar ausentes *a la vez*.» Es decir, que o está Carr, o está Allen o están ambos.

6.	$\neg r$	
7.	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	MT, 2, 6
8.	$p \vee q$	Df. $\wedge$, 7
9.	$p \vee q$	RE $\vee$, 3, 4-5, 6-8

Por el método de reducción al absurdo:

1.	$\neg q \to \neg r$	P
2.	$(\neg p \wedge \neg q) \to r$	P
3.	$\neg(p \vee q)$	
4.	$\neg p \wedge \neg q$	Df. $\vee$, 3
5.	r	RE $\to$, 2, 4
6.	$\neg q$	RE $\wedge$, 4
7.	$\neg r$	RE $\to$, 1, 6
8.	$r \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 5, 7
9.	$\neg\neg(p \vee q)$	RI $\neg$, 3-8
10.	$p \vee q$	RE $\neg$, 9

Y, ¿qué hay de la argumentación de Tío Joe, presentada por su autor con tono tan terminante? Ya hemos visto que de sus premisas no era posible deducir válidamente 'p'. De esas premisas, sin embargo, se sigue '$p \vee q$', es decir, precisamente la conclusión extraída por Tío Jim. Veamos cómo:

1.	$\neg p \to (\neg q \to r)$	P
2.	$\neg p \to (\neg q \to \neg r)$	P
3.	$(\neg p \wedge \neg q) \to r$	RImp, 1
4.	$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg r$	RImp, 2
5.	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	RI $\neg$, 3, 4
6.	$p \vee q$	Df, $\vee$, 5

Al ejercicio 28.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \to r$	P
2.	$\neg[p \to (q \to r)]$	
3.	$p \wedge \neg(q \to r)$	Df. $\to$, 2
4.	$p \wedge q \wedge \neg r$	Df. $\to$, 3
5.	p	RE $\wedge$, 4
6.	q	RE $\wedge$, 4
7.	$\neg r$	RE $\wedge$, 4
8.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 5, 6
9.	r	RE $\to$, 1, 8
10.	$r \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 7, 9

11.	$p \to (q \to r)$	RI $\neg$, 2-10
12.	$[(p \wedge q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$	RI $\to$, 1, 11
13.	$p \to (q \to r)$	P
14.	$\neg [(p \wedge q) \to r]$	
15.	$p \wedge q \wedge \neg r$	Df. $\to$, 14
16.	p	RE $\wedge$, 15
17.	$q \to r$	RE $\to$, 13, 16
18.	q	RE $\wedge$, 15
19.	r	RE $\to$, 17, 18
20.	$\neg r$	RE $\wedge$, 15
21.	$r \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 19, 20
22.	$\neg\neg [(p \wedge q) \to r]$	RI $\neg$, 14-21
23.	$(p \wedge q) \to r$	RE $\neg$, 22
24.	$[p \to (q \to r)] \to [(p \wedge q) \to r]$	RI $\to$, 13, 23
25.	$[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$	RI $\leftrightarrow$, 12, 24

Al ejercicio 29.

Demostración:

1.	$p \to [(q \to r) \to s]$	P
2.	$q \to r$	
3.	p	
4.	$(q \to r) \to s$	RE $\to$, 1, 3
5.	s	RE $\to$, 4, 2
6.	$p \to s$	RI $\to$, 3-5
7.	$(q \to r) \to (p \to s)$	RI $\to$, 2-6

Al ejercicio 30.

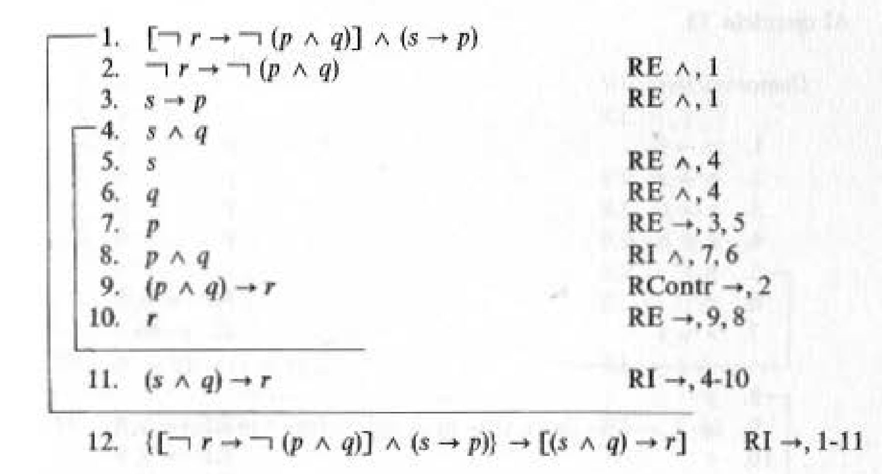
Demostración:

1.	$p \to [(q \to r) \to s]$	P
2.	$\neg [(q \to r) \to (p \to s)]$	
3.	$(q \to r) \wedge \neg (p \to s)$	RDf. $\to$, 2
4.	$q \to r$	RE $\wedge$, 3
5.	$\neg (p \to s)$	RE $\wedge$, 3
6.	$p \wedge \neg s$	RDf. $\to$, 5
7.	p	RE $\wedge$, 6
8.	$\neg s$	RE $\wedge$, 6
9.	$(q \to r) \to s$	RE $\to$, 1, 7

10.	s	RE $\to$, 4, 9
11.	$s \wedge \neg s$	RI $\wedge$, 10, 8
12.	$\neg\neg [(q \to r) \to (p \to s)]$	RI $\neg$, 2-11
13.	$(q \to r) \to (p \to s)$	RE $\neg$, 12

Al ejercicio 31.

Demostración:



1.	$[\neg r \to \neg (p \wedge q)] \wedge (s \to p)$	
2.	$\neg r \to \neg (p \wedge q)$	RE $\wedge$, 1
3.	$s \to p$	RE $\wedge$, 1
4.	$s \wedge q$	
5.	s	RE $\wedge$, 4
6.	q	RE $\wedge$, 4
7.	p	RE $\to$, 3, 5
8.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 7, 6
9.	$(p \wedge q) \to r$	RContr $\to$, 2
10.	r	RE $\to$, 9, 8
11.	$(s \wedge q) \to r$	RI $\to$, 4-10
12.	$\{[\neg r \to \neg (p \wedge q)] \wedge (s \to p)\} \to [(s \wedge q) \to r]$	RI $\to$, 1-11

Al ejercicio 32.

Demostración:

1.	$p \leftrightarrow (q \wedge t \wedge u)$	P
2.	$\neg p$	P
3.	$r \leftrightarrow \neg q$	P
4.	$\neg r \to t$	P
5.	$\neg u \to r$	P
6.	$\neg (q \wedge t \wedge u)$	$RE_4 \leftrightarrow$, 1, 2
7.	$\neg q \vee \neg t \vee \neg u$	RDf. $\wedge$, 6
8.	$\neg q \vee \neg t$	
9.	$\neg q$	
10.	r	$RE_3 \leftrightarrow$, 3, 9
11.	$\neg t$	
12.	$\neg t \to r$	RContr. $\to$, 4
13.	r	RE $\to$, 12, 11

14.	r	RE $\vee$, 8, 9-10, 11-13
15.	$r \vee s$	RI $\vee$, 14
16.	$\neg u$	
17.	r	RE $\rightarrow$, 5, 16
18.	$r \vee s$	RI $\vee$, 17
19.	$r \vee s$	RE $\vee$, 7, 8-15, 16-18

Al ejercicio 33.

Demostración:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$q \rightarrow r$	P
3.	$s \rightarrow t$	P
4.	$s \vee p$	P
5.	s	
6.	t	RE $\rightarrow$, 3, 5
7.	$r \vee t$	RI $\vee$, 6
8.	p	
9.	q	RE $\rightarrow$, 1, 8
10.	r	RE $\rightarrow$, 2, 9
11.	$r \vee t$	RI $\vee$, 10
12.	$r \vee t$	RE $\vee$, 4, 5-7, 8-11

Al ejercicio 34.

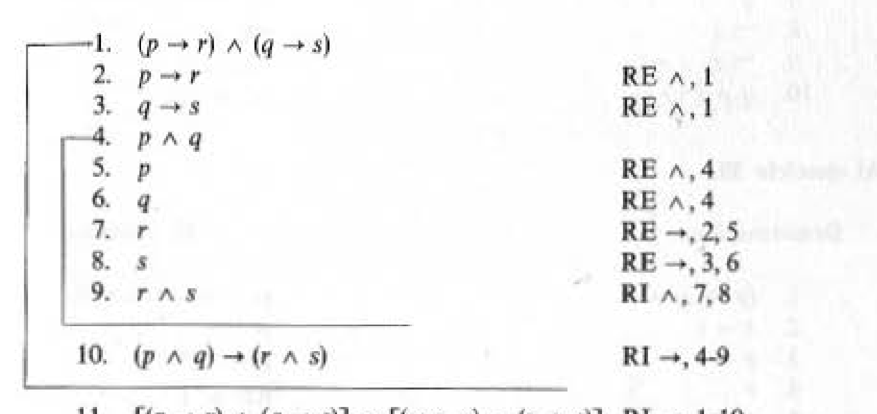
Demostración:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$q \rightarrow r$	P
3.	$s \rightarrow t$	P
4.	$s \vee p$	P
5.	$\neg (r \vee t)$	
6.	$\neg r \wedge \neg t$	RDf. $\vee$, 5
7.	$\neg r$	RE $\wedge$, 6
8.	$\neg t$	RE $\wedge$, 6
9.	$\neg s$	MT, 3, 8
10.	p	RIA$_1$, 4, 9
11.	q	RE $\rightarrow$, 1, 10

12.	r	RE $\rightarrow$, 2, 11
13.	$r \wedge \neg r$	RI $\rightarrow$, 12, 7
14.	$\neg\neg (r \vee t)$	RI $\neg$, 5-13
15.	$r \vee t$	RE $\neg$, 14

Al ejercicio 35.

Demostración:



1.	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)$	
2.	$p \rightarrow r$	RE $\wedge$, 1
3.	$q \rightarrow s$	RE $\wedge$, 1
4.	$p \wedge q$	
5.	p	RE $\wedge$, 4
6.	q	RE $\wedge$, 4
7.	r	RE $\rightarrow$, 2, 5
8.	s	RE $\rightarrow$, 3, 6
9.	$r \wedge s$	RI $\wedge$, 7, 8
10.	$(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$	RI $\rightarrow$, 4-9
11.	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)]$	RI $\rightarrow$, 1-10

Al ejercicio 36.

Demostración:

1.	$(p \vee q) \rightarrow r$	P
2.	$\neg [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$	
3.	$\neg (p \rightarrow r) \wedge \neg (q \rightarrow r)$	RDf. $\vee$, 2
4.	$(p \wedge \neg r) \wedge (q \wedge \neg r)$	RDf. $\rightarrow$, 3
5.	$p \wedge \neg r \wedge q \wedge \neg r$	[15]
6.	p	RE $\wedge$, 5
7.	$p \vee q$	RI $\vee$, 6
8.	r	RE $\rightarrow$, 1, 7
9.	$\neg r$	RE $\wedge$, 5
10.	$r \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 8, 9
11.	$\neg\neg [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$	RI $\neg$, 2-10
12.	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	RE $\neg$, 11

[15] Dado que la conjunción posee la propiedad asociativa, hemos eliminado los paréntesis.

Al ejercicio 37.

Demostración:

1.	$r \rightarrow s$	P
2.	$p \vee q$	P
3.	$\neg(\neg p \rightarrow s)$	P
4.	$\neg p \rightarrow q$	P
5.	$\neg p \wedge \neg s$	RDf. $\rightarrow$, 3[16]
6.	$\neg p$	RE $\wedge$, 5
7.	q	RE $\rightarrow$, 4, 6
8.	$\neg s$	RE $\wedge$, 5
9.	$\neg r$	MT, 1, 8
10.	$q \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 7, 9

Al ejercicio 38.

Demostración:

1.	$(p \rightarrow q) \wedge r$	P
2.	$s \rightarrow t$	P
3.	$r \rightarrow s$	P
4.	r	RE $\wedge$, 1
5.	s	RE $\rightarrow$, 3, 4
6.	t	RE $\rightarrow$, 2, 5
7.	$q \vee t$	RI $\vee$, 6

Al ejercicio 39.

Demostración:

1.	$(p \rightarrow q) \wedge r$	P
2.	$s \rightarrow t$	P
3.	$r \rightarrow s$	P
4.	$\neg(q \vee t)$	
5.	$\neg q \wedge \neg t$	RDf. $\vee$, 4
6.	$\neg q$	RE $\wedge$, 5
7.	$\neg t$	RE $\wedge$, 5
8.	$\neg s$	MT, 2, 7
9.	r	RE $\wedge$, 1
10.	s	RE $\rightarrow$, 3, 9
11.	$s \wedge \neg s$	RI $\wedge$, 10, 8
12.	$\neg\neg(q \vee t)$	RI $\neg$, 4-11
13.	$q \vee t$	RE $\neg$, 12

O bien:

10.	$\neg r$	MT, 3, 8
11.	$r \wedge \neg r$	RI $\wedge$, 9, 10
Etc.		

Al ejercicio 40.

Demostración:

1.	$\neg p \leftrightarrow q$	P
2.	$\neg(\neg q \vee r)$	P
3.	$p \vee s$	P
4.	$\neg\neg q \wedge r$	RDf. $\vee$, 2
5.	$\neg\neg q$	RE $\wedge$, 4
6.	q	RE $\neg$, 5
7.	$\neg p$	RE_3 $\leftrightarrow$, 1, 6
8.	s	RIA_1, 3, 7.
9.	$s \vee t$	RI $\vee$, 8

Al ejercicio 41.

Demostración:

1.	$p \rightarrow q$	P
2.	$r \vee \neg p$	P
3.	p	
4.	q	RE $\rightarrow$, 1, 3
5.	$\neg\neg p$	RI $\neg\neg$, 3
6.	r	RIA_2, 2, 5
7.	$q \wedge r$	RI $\wedge$, 4, 6
8.	$p \rightarrow (q \wedge r)$	RI $\rightarrow$, 3-7

[16] En efecto: puesto que

$$(X \rightarrow Y) = \neg(X \wedge \neg Y),$$

es obvio que

$$\neg(X \rightarrow Y) = X \wedge \neg Y$$

Por tanto,

$$\neg(\neg p \rightarrow s) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg s)$$

Al ejercicio 42.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	P
2.	$r \rightarrow s$	P
3.	$q \wedge \neg s$	P
4.	q	RE $\wedge$, 3
5.	$\neg s$	RE $\wedge$, 3
6.	$(p \wedge q) \rightarrow s$	RTr. $\rightarrow$, 1, 2
7.	$\neg (p \wedge q)$	MT, 6, 5
8.	$\neg p \vee \neg q$	RDf. $\wedge$, 7
9.	$\neg\neg q$	RI $\neg\neg$, 4
10.	$\neg p$	RIA$_2$, 8, 9

Al ejercicio 43.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	P
2.	$r \rightarrow s$	P
3.	$q \wedge \neg s$	P
4.	$\neg\neg p$	
5.	p	RE $\neg$, 4
6.	q	RE $\wedge$, 3
7.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 5, 6
8.	r	RE $\rightarrow$, 1, 7
9.	s	RE $\rightarrow$, 2, 8
10.	$\neg s$	RE $\wedge$, 3
11.	$s \wedge \neg s$	RI $\wedge$, 9, 10
12.	$\neg\neg\neg p$	RI $\neg$, 4-11
13.	$\neg p$	RE $\neg$

Al ejercicio 44.

Demostración:

1.	$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	P
2.	$\neg (t \wedge \neg p)$	P
3.	t	P
4.	$t \leftrightarrow q$	P
5.	$\neg r$	
6.	$t \rightarrow p$	RDf. $\wedge$, 2
7.	p	RE $\rightarrow$, 6, 3
8.	q	RE$_1$ $\leftrightarrow$, 4, 3
9.	$p \wedge q$	RI $\wedge$, 7, 8
10.	$r \vee s$	RE $\rightarrow$, 1, 9
11.	s	RIA$_1$, 10, 5
12.	$\neg r \rightarrow s$	RI $\rightarrow$, 5-11

Repárese en que la derivación también podía haberse llevado a cabo sin necesidad de introducir '$\neg r$' como premisa auxiliar. Bastaría con haber obtenido, a base únicamente de las premisas iniciales, la expresión '$r \vee s$' —cosa que, como se ha visto, es posible—, transformándola luego, en virtud de la RDf. $\vee$, en '$\neg r \rightarrow s$'.

Al ejercicio 45.

Demostración:

1.	$p \vee q$	P
2.	$r \rightarrow \neg p$	P
3.	$s \rightarrow r$	P
4.	$\neg t \rightarrow s$	P
5.	$r \leftrightarrow \neg q$	P
6.	$\neg t \rightarrow r$	RTr. $\rightarrow$, 4, 3
7.	p	
8.	$p \rightarrow \neg r$	RContr. $\rightarrow$, 2
9.	$\neg r$	RE $\rightarrow$, 8, 7
10.	$\neg r \rightarrow t$	RContr. $\rightarrow$, 6
11.	t	RE $\rightarrow$, 10, 9
12.	q	
13.	$r \rightarrow \neg q$	RD $\leftrightarrow$, 5
14.	$q \rightarrow \neg r$	RContr. $\rightarrow$, 13
15.	$\neg r$	RE $\rightarrow$, 14, 12
16.	$\neg t \rightarrow r$	RTr. $\rightarrow$, 4, 3
17.	$\neg r \rightarrow t$	RContr. $\rightarrow$, 16
18.	t	RE $\rightarrow$, 17, 15
19.	t	RE $\vee$, 1, 7-11, 12-18

Al ejercicio 46.

Demostración:

1.	$(p \wedge \neg q \wedge r) \rightarrow s$	P
2.	t	P
3.	$(s \wedge t) \rightarrow u$	P
4.	$p \rightarrow (u \rightarrow \neg w)$	P
5.	w	P
6.	$p \wedge r$	
7.	p	RE $\wedge$, 6
8.	r	RE $\wedge$, 6
9.	$u \rightarrow \neg w$	RE $\rightarrow$, 4, 7
10.	$w \rightarrow \neg u$	RContr. $\rightarrow$, 9
11.	$\neg u$	RE $\rightarrow$, 10, 5
12.	$\neg (s \wedge t)$	MT, 3, 11
13.	$\neg s \vee \neg t$	RDf. $\wedge$, 12
14.	$\neg s$	RIA_2, 13, 2
15.	$\neg (p \wedge \neg q \wedge r)$	MT, 1, 14
16.	$\neg p \vee \neg\neg q \vee \neg r$	RDf. $\wedge$, 15
17.	$p \rightarrow (\neg\neg q \vee \neg r)$	RDf. $\vee$, 16
18.	$p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg r)$	RDf. $\vee$, 17
19.	$\neg q \rightarrow \neg r$	RE $\rightarrow$, 18, 7
20.	$r \rightarrow q$	RContr. $\rightarrow$, 19
21.	q	RE $\rightarrow$, 20, 8
22.	$(p \wedge r) \rightarrow q$	RI $\rightarrow$, 6-21

Al ejercicio 47.

Demostración:

1.	$(p \wedge \neg q \wedge r) \rightarrow s$	P
2.	t	P
3.	$(s \wedge t) \rightarrow u$	P
4.	$p \rightarrow (u \rightarrow \neg w)$	P
5.	w	P
6.	$\neg [(p \wedge r) \rightarrow q]$	
7.	$p \wedge r \wedge \neg q$	RDf. $\rightarrow$, 6
8.	$p \wedge \neg q \wedge r$	IT, 7
9.	s	RE $\rightarrow$, 1, 8
10.	p	RE $\wedge$, 8
11.	$\neg q$	RE $\wedge$, 8
12.	r	RE $\wedge$, 8

13.	$u \rightarrow \neg w$	RE $\rightarrow$, 4, 10
14.	$w \rightarrow \neg u$	RContr. $\rightarrow$, 13
15.	$\neg u$	RE $\rightarrow$, 14, 5
16.	$\neg (s \wedge t)$	MT, 3, 15
17.	$\neg s \vee \neg t$	RDf. $\wedge$, 16
18.	$\neg s$	RIA_2, 17, 2
19.	$s \wedge \neg s$	RI $\wedge$, 9, 18
20.	$\neg\neg [(p \wedge r) \rightarrow q]$	RI $\neg$, 6-19
21.	$(p \wedge r) \rightarrow q$	RE $\neg$, 20

Al ejercicio 48.

Glosario

E = existir
G = engañarse
a = yo

Esquematización

$\bigwedge x(\neg Ex \rightarrow \neg Gx)$
Ga
―――――――
Ea

Derivación (directa)

1.	$\bigwedge x(\neg Ex \rightarrow \neg Gx)$	P
2.	Ga	P
3.	$\neg Ea \rightarrow \neg Ga$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Ga \rightarrow Ea$	RContr $\rightarrow$, 3
5.	Ea	RE $\rightarrow$, 2, 4

Derivación por reducción al absurdo

1.	$\bigwedge x(\neg Ex \rightarrow \neg Gx)$	P
2.	Ga	P
3.	$\neg Ea \rightarrow \neg Ga$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$\neg Ea$	
5.	$\neg Ga$	RE $\rightarrow$, 2, 4
6.	$Ga \wedge \neg Ga$	RI $\wedge$, 2, 5
7.	$\neg\neg Ea$	RI $\neg$, 4-6
8.	Ea	RE $\neg$, 7

Al ejercicio 49.

Derivación (directa)

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow Px)$	P
3.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 2
5.	$Ra \rightarrow \neg Qa$	RTr $\rightarrow$, 4, 3
6.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Qx)$	RI $\wedge$ 5

Derivación por reducción al absurdo

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow Px)$	P
3.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 2
5.	$\neg (Ra \rightarrow \neg Qa)$	
6.	$Ra \wedge Qa$	RDf $\rightarrow$, 5
7.	Ra	RE $\wedge$, 6
8.	Qa	RE $\wedge$, 6
9.	Pa	RE $\rightarrow$, 4, 7
10.	$\neg Pa$	MT, 3, 8
11.	$Pa \wedge \neg Pa$	RI $\wedge$, 9, 10
12.	$\neg\neg (Ra \rightarrow \neg Qa)$	RI $\neg$, 5-11
13.	$(Ra \rightarrow \neg Qa)$	RE $\neg$, 12
14.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Qx)$	RI $\wedge$, 13

Al ejercicio 50.

Derivación

1.	$\bigwedge x\,(Qx \rightarrow \neg Px)$	P
2.	$\bigvee x\,(Rx \wedge Qx)$	P
3.	$Qa \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \wedge Qa$	
5.	Ra	RE $\wedge$, 4
6.	Qa	RE $\wedge$, 4
7.	$\neg Pa$	RE $\rightarrow$, 3, 6
8.	$Ra \wedge \neg Pa$	RI $\wedge$, 5, 7
9.	$\bigvee x\,(Rx \wedge \neg Px)$	RI $\vee$, 8
10.	$\bigvee x\,(Rx \wedge \neg Px)$	RE $\vee$, 2, 4-9

Al ejercicio 51.

Derivación (directa)

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow Qx)$	P
3.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \rightarrow Qa$	RE $\wedge$, 2
5.	$Qa \rightarrow \neg Pa$	RContr $\rightarrow$, 3
6.	$Ra \rightarrow \neg Pa$	RTr $\rightarrow$, 4, 5
7.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Px)$	RI $\wedge$, 6

Derivación por reducción al absurdo

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow Qx)$	P
3.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \rightarrow Qa$	RE $\wedge$, 2
5.	$\neg (Ra \rightarrow \neg Pa)$	
6.	$Ra \wedge Pa$	RDf $\rightarrow$, 5
7.	Ra	RE $\wedge$, 6
8.	Pa	RE $\wedge$, 6
9.	Qa	RE $\rightarrow$, 4, 7
10.	$\neg Qa$	RE $\rightarrow$, 3, 8
11.	$Qa \wedge \neg Qa$	RI $\wedge$, 9, 10
12.	$\neg\neg (Ra \rightarrow \neg Pa)$	RI $\neg$, 5-11
13.	$(Ra \rightarrow \neg Pa)$	RE $\neg$, 12
14.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Px)$	RI $\wedge$, 13

Al ejercicio 52.

Demostración:

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Qx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\wedge$, 1
4.	$Ra \rightarrow \neg Qa$	RE $\wedge$, 2
5.	$\neg Qa \rightarrow \neg Pa$	RContr. $\rightarrow$, 3
6.	$Ra \rightarrow \neg Pa$	RTr $\rightarrow$, 4, 5
7.	$\bigwedge x\,(Rx \rightarrow \neg Px)$	RI $\wedge$, 6

Al ejercicio 53.

Demostración:

1.	$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigvee x(Rx \wedge Qx)$	P
3.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Ra \wedge Qa$	
5.	Ra	RE $\wedge$, 4
6.	Qa	RE $\wedge$, 4
7.	$Qa \rightarrow \neg Pa$	RContr. $\rightarrow$, 3
8.	$\neg Pa$	RE $\rightarrow$, 7, 6
9.	$Ra \wedge \neg Pa$	RI $\wedge$, 5, 8
10.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$	RI $\bigvee$, 9
11.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$	RE $\bigvee$, 2, 4-10

Al ejercicio 54.

Derivación

1.	$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Qx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Ra \wedge \neg Qa$	
5.	Ra	RE $\wedge$, 4
6.	$\neg Qa$	RE $\wedge$, 4
7.	$\neg Pa$	MT, 3, 6
8.	$Ra \wedge \neg Pa$	RI $\wedge$, 5, 7
9.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$	RI $\bigvee$, 8
10.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Px)$	RE $\bigvee$, 2, 4-9

Al ejercicio 55.

Derivación

1.	$\bigvee x(Px \wedge Qx)$	P
2.	$\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
4.	$Pa \wedge Qa$	
5.	Pa	RE $\wedge$, 4
6.	Qa	RE $\wedge$, 4
7.	Ra	RE $\rightarrow$, 3, 5
8.	$Ra \wedge Qa$	RI $\wedge$, 6, 7
9.	$\bigvee x(Rx \wedge Qx)$	RI $\bigvee$, 8
10.	$\bigvee x(Rx \wedge Qx)$	RE $\bigvee$, 1, 4-9

Al ejercicio 56.

Demostración:

1.	$\bigwedge x(Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigvee x(Px \wedge Rx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Pa \wedge Ra$	
5.	Pa	RE $\wedge$, 4
6.	Ra	RE $\wedge$, 4
7.	Qa	RE $\rightarrow$, 3, 5
8.	$Ra \wedge Qa$	RI $\wedge$, 6, 7
9.	$\bigvee x(Rx \wedge Qx)$	RI $\bigvee$, 8
10.	$\bigvee x(Rx \wedge Qx)$	RE $\bigvee$, 2, 4-9

Al ejercicio 57.

Derivación

1.	$\bigvee x(Px \wedge \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x(Px \rightarrow Rx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
4.	$Pa \wedge \neg Qa$	
5.	Pa	RE $\wedge$, 4
6.	$\neg Qa$	RE $\wedge$, 4
7.	Ra	RE $\rightarrow$, 3, 5
8.	$Ra \wedge \neg Qa$	RI $\wedge$, 7, 6
9.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Qx)$	RI $\bigvee$, 8
10.	$\bigvee x(Rx \wedge \neg Qx)$	RE $\bigvee$, 1, 4-9

Al ejercicio 58.

Demostración:

1.	$\bigwedge x(Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigvee x(Px \wedge Rx)$	P
3.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\bigwedge$, 1

4.	$Pa \wedge Ra$	
5.	Pa	RE $\wedge$, 4
6.	Ra	RE $\wedge$, 4
7.	$\neg Qa$	RE $\rightarrow$, 3, 5
8.	$Ra \wedge \neg Qa$	RI $\wedge$, 6, 7
9.	$\bigvee x (Rx \wedge \neg Qx)$	RI $\bigvee$, 8
10.	$\bigvee x (Rx \wedge \neg Qx)$	RE $\bigvee$, 2, 4-9

Al ejercicio 59.

Demostración:

1.	$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigwedge x (Qx \rightarrow \neg Rx)$	P
3.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Qa \rightarrow \neg Ra$	RE $\bigwedge$, 2
5.	$Pa \rightarrow \neg Ra$	RTr. $\rightarrow$, 3, 4
6.	$Ra \rightarrow \neg Pa$	RContr. $\rightarrow$, 5
7.	$\bigwedge x (Rx \rightarrow \neg Px)$	RI $\bigwedge$, 6

Al ejercicio 60.

Demostración:

1.	$\bigvee x (Px \wedge Qx)$	P
2.	$\bigwedge x (Qx \rightarrow Rx)$	P
3.	$Qa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
4.	$Pa \wedge Qa$	
5.	Pa	RE $\wedge$, 4
6.	Qa	RE $\wedge$, 4
7.	Ra	RE $\rightarrow$, 3, 6
8.	$Ra \wedge Pa$	RI $\wedge$, 7, 5
9.	$\bigvee x (Rx \wedge Px)$	RI $\bigvee$, 8
10.	$\bigvee x (Rx \wedge Px)$	RE $\bigvee$, 1, 4-9

Al ejercicio 62.

Primera demostración (Modo DARAPTI):

1.	$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigwedge x (Px \rightarrow Rx)$	P
3.	$\bigvee x\, Px$	P (suplementaria)

4.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\bigwedge$, 1
5.	$Pa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
6.	Pa	
7.	Qa	RE $\rightarrow$, 4, 6
8.	Ra	RE $\rightarrow$, 5, 6
9.	$Ra \wedge Qa$	RI $\wedge$, 8, 7
10.	$\bigvee x (Rx \wedge Qx)$	RI $\bigvee$, 9
11.	$\bigvee x (Rx \wedge Qx)$	RE $\bigvee$, 3, 6-10

Segunda demostración (Modo FELAPTON):

1.	$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x (Px \rightarrow Rx)$	P
3.	$\bigvee x\, Px$	P (suplementaria)
4.	$Pa \rightarrow \neg Qa$	RE $\bigwedge$, 1
5.	$Pa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
6.	Pa	
7.	$\neg Qa$	RE $\rightarrow$, 4, 6
8.	Ra	RE $\rightarrow$, 5, 6
9.	$Ra \wedge \neg Qa$	RI $\wedge$, 8, 7
10.	$\bigvee x (Rx \wedge \neg Qx)$	RI $\bigvee$, 9
11.	$\bigvee x (Rx \wedge \neg Qx)$	RE $\bigvee$, 3, 6-10

Tercera demostración (Modo BARALIPTON):

1.	$\bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\bigwedge x (Qx \rightarrow Rx)$	P
3.	$\bigvee x\, Px$	P (suplementaria)
4.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\bigwedge$, 1
5.	$Qa \rightarrow Ra$	RE $\bigwedge$, 2
6.	Pa	
7.	Qa	RE $\rightarrow$, 4, 6
8.	Ra	RE $\rightarrow$, 5, 7
9.	$Ra \wedge Pa$	RI $\wedge$, 8, 6
10.	$\bigvee x (Rx \wedge Px)$	RI $\bigvee$, 9
11.	$\bigvee x (Rx \wedge Px)$	RE $\bigvee$, 3, 6-10

Cuarta demostración (Modo FESAPO):

1.	$\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$	P
2.	$\bigwedge x (Qx \rightarrow Rx)$	P
3.	$\bigvee x\, Qx$	P (suplementaria)

4.	$Pa \to \neg Qa$	RE $\wedge$, 1
5.	$Qa \to Ra$	RE $\wedge$, 2
6.	Qa	
7.	$Qa \to \neg Pa$	RContr. $\to$, 4
8.	$\neg Pa$	RE $\to$, 7, 6
9.	Ra	RE $\to$, 5, 6
10.	$Ra \wedge \neg Pa$	RI $\wedge$, 9, 8
11.	$\vee x(Rx \wedge \neg Px)$	RI $\vee$, 10
12.	$\vee x(Rx \wedge \neg Px)$	RE $\vee$, 3, 6-11

Al ejercicio 63.

Glosario

A = ser un ánade
B = bailar el vals [no declinar nunca una invitación a hacerlo]
O = ser un oficial
C = ser una de mis aves de corral

Esquematización

$\wedge x(Ax \to \neg Bx)$
$\wedge x(Ox \to Bx)$
$\wedge x(Cx \to Ax)$

$\wedge x(Cx \to \neg Ox)$

Derivación (directa)

1.	$\wedge x(Ax \to \neg Bx)$	P
2.	$\wedge x(Ox \to Bx)$	P
3.	$\wedge x(Cx \to Ax)$	P
4.	$Aa \to \neg Ba$	RE $\wedge$, 1
5.	$Oa \to Ba$	RE $\wedge$, 2
6.	$Ca \to Aa$	RE $\wedge$, 3
7.	$Ca \to \neg Ba$	RTr $\to$, 6, 4
8.	$\neg Ba \to \neg Oa$	RContr $\to$, 5
9.	$Ca \to \neg Oa$	RTr $\to$, 7, 8
10.	$\wedge x(Cx \to \neg Ox)$	RI $\wedge$, 9

Al ejercicio 64.

Demostración:

1.	$\wedge x(Px \to Qx)$	
2.	$Pa \to Qa$	RE $\wedge$, 1
3.	$\neg Qa$	
4.	$\neg Pa$	MT, 2, 3
5.	$\neg Qa \to \neg Pa$	RI $\to$, 3-4
6.	$\wedge x(\neg Qx \to \neg Px)$	RI $\wedge$, 5
7.	$\wedge x(Px \to Qx) \to \wedge x(\neg Qx \to \neg Px)$	RI $\to$, 1-6
8.	$\wedge x(\neg Qx \to \neg Px)$	
9.	$\neg Qa \to \neg Pa$	RE $\wedge$, 8
10.	Pa	
11.	Qa	MT, 9, 10
12.	$Pa \to Qa$	RI $\to$, 10-11
13.	$\wedge x(Px \to Qx)$	RI $\wedge$, 12
14.	$\wedge x(\neg Qx \to \neg Px) \to \wedge x(Px \to Qx)$	RI $\to$, 8-13
15.	$\wedge x(Px \to Qx) \leftrightarrow \wedge x(\neg Qx \to \neg Px)$	RI $\leftrightarrow$, 7, 14

Al ejercicio 65.

Glosario

C = ser miembro de la Cámara de los Comunes ('$\neg C$' equivaldrá a: ser miembro de la Cámara de los Lores, ya que entre ambas agotan el universo del discurso, formado por los parlamentarios ingleses)
D = tener un perfecto dominio de sí mismo
U = usar corona (ducal, de marqués, etc.)
B = participar en una carrera de burros

Esquematización

$\wedge x(Cx \to Dx)$
$\wedge x(Ux \to \neg Bx)$
$\wedge x(\neg Cx \to Ux)$

$\wedge x(\neg Dx \to \neg Bx)$

Demostración:

1.	$\wedge x(Cx \rightarrow Dx)$	P
2.	$\wedge x(Ux \rightarrow \neg Bx)$	P
3.	$\wedge x(\neg Cx \rightarrow Ux)$	P
4.	$Ca \rightarrow Da$	RE $\wedge$, 1
5.	$Ua \rightarrow \neg Ba$	RE $\wedge$, 2
6.	$\neg Ca \rightarrow Ua$	RE $\wedge$, 3
7.	$\neg Da \rightarrow \neg Ca$	RContr. $\rightarrow$, 4
8.	$\neg Da \rightarrow Ua$	RTr $\rightarrow$, 7, 6
9.	$\neg Da \rightarrow \neg Ba$	RTr $\rightarrow$, 8, 5
10.	$\wedge x(\neg Dx \rightarrow \neg Bx)$	RI $\wedge$, 9

Al ejercicio 66.

Glosario

C = ser un colibrí
L = tener vivos colores
T = ser de gran tamaño
M = alimentarse de miel

Esquematización

$\wedge x(Cx \rightarrow Lx)$
$\wedge x(Tx \rightarrow \neg Mx)$
$\wedge x(\neg Mx \rightarrow \neg Lx)$

$\wedge x(Cx \rightarrow \neg Tx)$

Derivación (directa)

1.	$\wedge x(Cx \rightarrow Lx)$	P
2.	$\wedge x(Tx \rightarrow \neg Mx)$	P
3.	$\wedge x(\neg Mx \rightarrow \neg Lx)$	P
4.	$Ca \rightarrow La$	RE $\wedge$, 1
5.	$Ta \rightarrow \neg Ma$	RE $\wedge$, 2
6.	$\neg Ma \rightarrow \neg La$	RE $\wedge$, 3
7.	$La \rightarrow Ma$	RContr $\rightarrow$, 6
8.	$Ca \rightarrow Ma$	RTr $\rightarrow$, 4, 7
9.	$Ma \rightarrow \neg Ta$	RContr $\rightarrow$, 5
10.	$Ca \rightarrow \neg Ta$	RTr $\rightarrow$, 8, 9
11.	$\wedge x(Cx \rightarrow \neg Tx)$	RI $\wedge$, 10

Otra forma de derivación directa

1.	$\wedge x(Cx \rightarrow Lx)$	P
2.	$\wedge x(Tx \rightarrow \neg Mx)$	P
3.	$\wedge x(\neg Mx \rightarrow \neg Lx)$	P
4.	$Ca \rightarrow La$	RE $\wedge$, 1
5.	$Ta \rightarrow \neg Ma$	RE $\wedge$, 2
6.	$\neg Ma \rightarrow \neg La$	RE $\wedge$, 3
7.	Ca	
8.	La	RE $\rightarrow$, 4, 7
9.	Ma	MT, 6, 8
10.	$\neg Ta$	MT, 5, 9
11.	$Ca \rightarrow \neg Ta$	RI $\rightarrow$, 7-10
12.	$\wedge x(Cx \rightarrow \neg Tx)$	RI $\wedge$, 11

Al ejercicio 67.

Glosario

T = estar suscrito al *Times*
B = ser persona bien educada
P = ser un puercoespín
S = saber leer

Esquematización:

$\wedge x(Tx \rightarrow Bx)$
$\wedge x(Px \rightarrow \neg Sx)$
$\wedge x(Bx \rightarrow Sx)$

$\wedge x(Px \rightarrow \neg Tx)$

Demostración:

1.	$\wedge x(Tx \rightarrow Bx)$	P
2.	$\wedge x(Px \rightarrow \neg Sx)$	P
3.	$\wedge x(Bx \rightarrow Sx)$	P
4.	$Ta \rightarrow Ba$	RE $\wedge$, 1
5.	$Pa \rightarrow \neg Sa$	RE $\wedge$, 2
6.	$Ba \rightarrow Sa$	RE $\wedge$, 3
7.	$\neg Sa \rightarrow \neg Ba$	RContr. $\rightarrow$, 6
8.	$Pa \rightarrow \neg Ba$	RTr $\rightarrow$, 5, 7
9.	$\neg Ba \rightarrow \neg Ta$	RContr. $\rightarrow$, 4
10.	$Pa \rightarrow \neg Ta$	RTr $\rightarrow$, 8, 9
11.	$\wedge x(Px \rightarrow \neg Tx)$	RI $\wedge$, 10

Al ejercicio 68.

Glosario

M = ser una proposición metafísica
E = ser una proposición empírica
A = ser una proposición analítica
S = ser una proposición con sentido

Esquematización

$\bigwedge x\,[Mx \rightarrow \neg\,(Ex \vee Ax)]$
$\bigwedge x\,[Sx \rightarrow (Ex \vee Ax)]$

$\bigwedge x\,(Mx \rightarrow \neg\, Sx)$

Derivación (directa)

1.	$\bigwedge x\,[Mx \rightarrow \neg\,(Ex \vee Ax)]$	P
2.	$\bigwedge x\,[Sx \rightarrow (Ec \vee Ax)]$	P
3.	$Ma \rightarrow \neg\,(Ea \vee Aa)$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Sa \rightarrow (Ea \vee Aa)$	RE $\bigwedge$, 2
5.	Ma	
6.	$\neg\,(Ea \vee Aa)$	RE $\rightarrow$, 3, 5
7.	$\neg\, Sa$	MT, 4, 6
8.	$Ma \rightarrow \neg\, Sa$	RI $\rightarrow$, 5-7
9.	$\bigwedge x\,(Mx \rightarrow \neg\, Sx)$	RI $\bigwedge$, 8

Derivación por reducción al absurdo

1.	$\bigwedge x\,[Mx \rightarrow \neg\,(Ex \vee Ax)]$	P
2.	$\bigwedge x\,[Sx \rightarrow (Ex \vee Ax)]$	P
3.	$Ma \rightarrow \neg\,(Ea \vee Aa)$	RE $\bigwedge$, 1
4.	$Sa \rightarrow (Ea \vee Aa)$	RE $\bigwedge$, 2
5.	$\neg\,(Ma \rightarrow \neg\, Sa)$	
6.	$Ma \wedge Sa$	RDf $\rightarrow$, 5
7.	Ma	RE $\wedge$, 6
8.	Sa	RE $\wedge$, 6
9.	$\neg\,(Ea \vee Aa)$	RE $\rightarrow$, 3, 7
10.	$Ea \vee Aa$	RE $\rightarrow$, 4, 8
11.	$\neg\,(Ea \vee Aa) \wedge (Ea \vee Aa)$	RI $\wedge$, 9, 10
12.	$\neg\neg\,(Ma \rightarrow \neg\, Sa)$	RI $\neg$, 5-11
13.	$(Ma \rightarrow \neg\, Sa)$	RE $\neg$
14.	$\bigwedge x\,(Mx \rightarrow \neg\, Sx)$	RI $\bigwedge$, 13

Al ejercicio 69.

Demostración:

1.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx)$	
2.	$Pa \vee Qa$	
3.	Pa	
4.	$\bigvee x\, Px$	RI $\bigvee$, 3
5.	$\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx$	RI $\vee$, 4
6.	Qa	
7.	$\bigvee x\, Qx$	RI $\bigvee$, 6
8.	$\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx$	RI $\vee$, 7
9.	$\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx$	RE $\vee$, 2, 3-5, 6-8
10.	$\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx$	RE $\bigvee$, 1, 2-9
11.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx) \rightarrow (\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx)$	RI $\rightarrow$, 1-10
12.	$\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx$	
13.	$\bigvee x\, Px$	
14.	Pa	
15.	$Pa \vee Qa$	RI $\vee$, 14
16.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx)$	RI $\bigvee$, 15
17.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx)$	RE $\bigvee$, 13, 14-16
18.	$\bigvee x\, Qx$	
19.	Qa	
20.	$Pa \vee Qa$	RI $\vee$, 19
21.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx)$	RI $\bigvee$, 20
22.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx)$	RE $\bigvee$, 18, 19-21
23.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx)$	RE $\vee$, 12, 13-17, 18-22
24.	$(\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx) \rightarrow \bigvee x\,(Px \vee Qx)$	RI $\rightarrow$, 12-23
25.	$\bigvee x\,(Px \vee Qx) \leftrightarrow (\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx)$	RI $\leftrightarrow$, 11, 24

Al ejercicio 70.

Glosario

I = ser un poema interesante
R = gozar de aceptación entre gentes de buen gusto
M = ser un poema moderno

A = ser afectado
E = ser un poema escrito por usted
P = versar acerca de pompas de jabón

Esquematización

$\wedge x(Ix \rightarrow Rx)$[16]
$\wedge x(Mx \rightarrow Ax)$[17]
$\wedge x(Ex \rightarrow Px)$
$\wedge x(Ax \rightarrow \neg Rx)$
$\wedge x(\neg Mx \rightarrow \neg Px)$

$\wedge x(Ex \rightarrow \neg Ix)$

Derivación

1.	$\wedge x(Ix \rightarrow Rx)$	P
2.	$\wedge x(Mx \rightarrow Ax)$	P
3.	$\wedge x(Ex \rightarrow Px)$	P
4.	$\wedge x(Ax \rightarrow \neg Rx)$	P
5.	$\wedge x(\neg Mx \rightarrow \neg Px)$	P
6.	$Ia \rightarrow Ra$	RE $\wedge$, 1
7.	$Ma \rightarrow Aa$	RE $\wedge$, 2
8.	$Ea \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 3
9.	$Aa \rightarrow \neg Ra$	RE $\wedge$, 4
10.	$\neg Ma \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 5
11.	Ea	
12.	Pa	RE $\rightarrow$, 8, 11
13.	Ma	MT, 10, 12
14.	Aa	RE $\rightarrow$, 7, 13
15.	$\neg Ra$	RE $\rightarrow$, 9, 14
16.	$\neg Ia$	MT, 6, 15
17.	$Ea \rightarrow \neg Ia$	RI $\rightarrow$, 11-16
18.	$\wedge x(Ex \rightarrow \neg Ix)$	RI $\wedge$, 17

Al ejercicio 71.

Glosario

C = cocear
F = ser flemático
A = ser un asno
N = tener cuernos

[16] Es decir: 'Todo poema interesante es bien aceptado o recibido entre gentes de buen gusto'.
[17] Es decir: 'Todo poema moderno es afectado'.

B = ser un búfalo
L = ser un animal que puede lanzarlo a uno contra una puerta
E = ser un animal fácil de engullir

Esquematización

$\wedge x(\neg Cx \rightarrow Fx)$
$\wedge x(Ax \rightarrow \neg Nx)$
$\wedge x(Bx \rightarrow Lx)$
$\wedge x(Cx \rightarrow \neg Ex)$
$\wedge x(\neg Nx \rightarrow \neg Lx)$
$\wedge x(\neg Bx \rightarrow \neg Fx)$

$\wedge x(Ax \rightarrow \neg Ex)$

Derivación

1.	$\wedge x(\neg Cx \rightarrow Fx)$	P
2.	$\wedge x(Ax \rightarrow \neg Nx)$	P
3.	$\wedge x(Bx \rightarrow Lx)$	P
4.	$\wedge x(Cx \rightarrow \neg Ex)$	P
5.	$\wedge x(\neg Nx \rightarrow \neg Lx)$	P
6.	$\wedge x(\neg Bx \rightarrow \neg Fx)$	P
7.	$\neg Ca \rightarrow Fa$	RE $\wedge$, 1
8.	$Aa \rightarrow \neg Na$	RE $\wedge$, 2
9.	$Ba \rightarrow La$	RE $\wedge$, 3
10.	$Ca \rightarrow \neg Ea$	RE $\wedge$, 4
11.	$\neg Na \rightarrow \neg La$	RE $\wedge$, 5
12.	$\neg Ba \rightarrow \neg Fa$	RE $\wedge$, 6
13.	Aa	
14.	$\neg Na$	RE $\rightarrow$, 8, 13
15.	$\neg La$	RE $\rightarrow$, 11, 14
16.	$\neg Ba$	MT, 9, 15
17.	$\neg Fa$	RE $\rightarrow$, 12, 16
18.	Ca	MT, 7, 17
19.	$\neg Ea$	RE $\rightarrow$, 10, 18
20.	$Aa \rightarrow \neg Ea$	RI $\rightarrow$, 13-19
21.	$\wedge x(Ax \rightarrow \neg Ex)$	RI $\wedge$, 20

Al ejercicio 72.

Glosario

D = ser un demócrata
L = ser liberal

S = ser socialista
C = ser conservador
R = aceptar la revolución industrial
P = defender la propiedad privada de los medios de producción
M = defender el establecimiento de una economía de mercado autorregulada
T = defender la conversión del trabajo en mercancía

Esquematización

$\bigwedge x\,[Dx \rightarrow (Lx \vee Sx)]$
$\bigwedge x\,[Lx \rightarrow (Rx \wedge Px \wedge Mx \wedge Tx)]$
$\bigwedge x\,[Sx \rightarrow (Rx \wedge \neg Px \wedge \neg Mx \wedge \neg Tx)]$
$\bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Rx)$

$[\bigwedge x\,(Lx \vee Sx) \rightarrow \neg Cx] \wedge \bigwedge x\,(Lx \rightarrow \neg Sx) \wedge \bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Dx)$

Derivación

1.	$\bigwedge x\,[Dx \rightarrow (Lx \vee Sx)]$	P
2.	$\bigwedge x\,[Lx \rightarrow (Rx \wedge Px \wedge Mx \wedge Tx)]$	P
3.	$\bigwedge x\,[Sx \rightarrow (Rx \wedge \neg Px \wedge \neg Mx \wedge \neg Tx)]$	P
4.	$\bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Rx)$	P
5.	$Da \rightarrow (La \vee Sa)$	RE $\bigwedge$, 1
6.	$La \rightarrow (Ra \wedge Pa \wedge Ma \wedge Ta)$	RE $\bigwedge$, 2
7.	$Sa \rightarrow (Ra \wedge \neg Pa \wedge \neg Ma \wedge \neg Ta)$	RE $\bigwedge$, 3
8.	$Ca \rightarrow \neg Ra$	RE $\bigwedge$, 4
9.	$La \vee Sa$	[18]
10.	$La \vee Sa$	RRl $\rightarrow$, 9
11.	La	
12.	$Ra \wedge Pa \wedge Ma \wedge Ta$	RE $\rightarrow$, 6, 11
13.	Ra	RE $\wedge$, 12
14.	$\neg Ca$	MT, 8, 13
15.	Sa	
16.	$Ra \wedge \neg Pa \wedge \neg Ma \wedge \neg Ta$	RE $\rightarrow$, 7, 15
17.	Ra	RE $\wedge$, 16
18.	$\neg Ca$	MT, 8, 17
19.	$\neg Ca$	RE $\vee$, 10, 11-14, 15-18

[18] Vamos a proceder a derivar el primero de los enunciados que componen la conclusión buscada. Dado que ese enunciado tiene forma de condicional, tomamos como premisa auxiliar el antecedente (previa eliminación del cuantificador universal en la fórmula).

20.	$(La \vee Sa) \rightarrow \neg Ca$	RI $\rightarrow$, 9-19
21.	$\bigwedge x\,[(Lx \vee Sx) \rightarrow \neg Cx]$	RI $\bigwedge$, 20
22.	La	[19]
23.	$Ra \wedge Pa \wedge Ma \wedge Ta$	RE $\rightarrow$, 6, 22
24.	Pa	RE $\wedge$, 23
25.	$\neg Sa$	MT, 7, 24 [20]
26.	$La \rightarrow \neg Sa$	RI $\rightarrow$, 22-25
27.	$\bigwedge x\,(Lx \rightarrow \neg Sx)$	RI $\bigwedge$, 26
28.	Ca	[21]
29.	$\neg Ra$	RE $\rightarrow$, 8, 28
30.	$\neg La$	MT, 6, 29 [22]
31.	$\neg Sa$	MT, 7, 29 [22]
32.	$\neg La \wedge \neg Sa$	RI $\wedge$, 30, 31
33.	$\neg (La \vee Sa)$	RDf $\wedge$, 32
34.	$\neg Da$	MT, 5, 33
35.	$Ca \rightarrow \neg Da$	RI $\rightarrow$, 28-34
36.	$\bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Dx)$	RI $\bigwedge$, 35
37.	$\bigwedge x\,[(Lx \vee Sx) \rightarrow \neg Cx] \wedge \bigwedge x\,(Lx \rightarrow \neg Sx)$	RI $\wedge$, 21, 27
38.	$\bigwedge x\,[(Lx \vee Sx) \rightarrow \neg Cx] \wedge \bigwedge x\,(Lx \rightarrow \neg Sx) \wedge \bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Dx)$	RI $\wedge$, 37, 36

Al ejercicio 73.

Glosario

T = ser un tiburón
D = dudar de su buena preparación
C = ser capaz de bailar un minueto
P = ser despreciable
F = tener tres filas de dientes
A = ser amable con los niños
O = ser obeso

[19] Antecedente del segundo de los enunciados que componen la conclusión perseguida.
[20] En efecto: recuérdese que para que una conjunción sea falsa basta con que lo sea uno de sus miembros.
[21] Antecedente del tercero y último de los enunciados que componen la conclusión.
[22] Cfr. la nota 20.

Esquematización

$\bigwedge x\,(Tx \rightarrow \neg Dx)$
$\bigwedge x\,(\neg Cx \rightarrow Px)$
$\bigwedge x\,(\neg Dx \rightarrow Fx)$
$\bigwedge x\,(\neg Tx \rightarrow Ax)$
$\bigwedge x\,(Ox \rightarrow \neg Cx)$
$\bigwedge x\,(Fx \rightarrow \neg Px)$

$\bigwedge x\,(Ox \rightarrow Ax)$

Demostración:

1.	$\bigwedge x\,(Tx \rightarrow \neg Dx)$	P
2.	$\bigwedge x\,(\neg Cx \rightarrow Px)$	P
3.	$\bigwedge x\,(\neg Dx \rightarrow Fx)$	P
4.	$\bigwedge x\,(\neg Tx \rightarrow Ax)$	P
5.	$\bigwedge x\,(Ox \rightarrow \neg Cx)$	P
6.	$\bigwedge x\,(Fx \rightarrow \neg Px)$	P
7.	$Ta \rightarrow \neg Da$	RE $\wedge$, 1
8.	$\neg Ca \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 2
9.	$\neg Da \rightarrow Fa$	RE $\wedge$, 3
10.	$\neg Ta \rightarrow Aa$	RE $\wedge$, 4
11.	$Oa \rightarrow \neg Ca$	RE $\wedge$, 5
12.	$Fa \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 6
13.	Oa	
14.	$\neg Ca$	RE $\rightarrow$, 11, 13
15.	Pa	RE $\rightarrow$, 8, 14
16.	$Pa \rightarrow \neg Fa$	RContr. $\rightarrow$, 12
17.	$\neg Fa$	RE $\rightarrow$, 16, 15
18.	$\neg Fa \rightarrow Da$	RContr. $\rightarrow$, 9
19.	Da	RE $\rightarrow$, 18, 17
20.	$Da \rightarrow \neg Ta$	RContr. $\rightarrow$, 7
21.	$\neg Ta$	RE $\rightarrow$, 20, 19
22.	Aa	RE $\rightarrow$, 10, 21
23.	$Oa \rightarrow Aa$	RI $\rightarrow$, 13-22
24.	$\bigwedge x\,(Ox \rightarrow Ax)$	RI $\wedge$, 23

Al ejercicio 74.

Glosario

P = ser un animal que recibe mi atención
I = ser un animal que se irrita mortalmente
E = ser un animal que está en este prado

M = ser un animal que me pertenece
C = ser un animal adecuadamente instruido
A = ser un animal capaz de adivinar un acertijo
T = ser un tejón
S = ser un animal que corre salvajemente y gruñe

Esquematización

$\bigwedge x\,(\neg Px \rightarrow Ix)$
$\bigwedge x\,(Mx \rightarrow Ex)$
$\bigwedge x\,(\neg Cx \rightarrow \neg Ax)$
$\bigwedge x\,(Ex \rightarrow \neg Tx)$
$\bigwedge x\,(Ix \rightarrow Sx)$
$\bigwedge x\,(\neg Mx \rightarrow \neg Px)$
$\bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Sx)$

$\bigwedge x\,(Tx \rightarrow \neg Ax)$

Derivación

1.	$\bigwedge x\,(\neg Px \rightarrow Ix)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Mx \rightarrow Ex)$	P
3.	$\bigwedge x\,(\neg Cx \rightarrow \neg Ax)$	P
4.	$\bigwedge x\,(Ex \rightarrow \neg Tx)$	P
5.	$\bigwedge x\,(Ix \rightarrow Sx)$	P
6.	$\bigwedge x\,(\neg Mx \rightarrow \neg Px)$	P
7.	$\bigwedge x\,(Cx \rightarrow \neg Sx)$	P
8.	$\neg Pa \rightarrow Ia$	RE $\wedge$, 1
9.	$Ma \rightarrow Ea$	RE $\wedge$, 2
10.	$\neg Ca \rightarrow \neg Aa$	RE $\wedge$, 3
11.	$Ea \rightarrow \neg Ta$	RE $\wedge$, 4
12.	$Ia \rightarrow Sa$	RE $\wedge$, 5
13.	$\neg Ma \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 6
14.	$Ca \rightarrow \neg Sa$	RE $\wedge$, 7
15.	$Ta \rightarrow \neg Ea$	RContr $\rightarrow$, 11
16.	$\neg Ea \rightarrow \neg Ma$	RContr $\rightarrow$, 9
17.	$Ta \rightarrow \neg Ma$	RTr $\rightarrow$, 15, 16
18.	$Ta \rightarrow \neg Pa$	RTr $\rightarrow$, 17, 13
19.	$Ta \rightarrow Ia$	RTr $\rightarrow$, 18, 8
20.	$Ta \rightarrow Sa$	RTr $\rightarrow$, 19, 12
21.	$Sa \rightarrow \neg Ca$	RContr $\rightarrow$, 14
22.	$Ta \rightarrow \neg Ca$	RTr $\rightarrow$, 20, 21
23.	$Ta \rightarrow \neg Aa$	RTr $\rightarrow$, 22, 10
24.	$\bigwedge x\,(Tx \rightarrow \neg Ax)$	RI $\wedge$, 23

Al ejercicio 75.

La inferencia —que en el texto original tiene más bien la forma de una ejemplificación— vendría a ser, en resumidas cuentas, la siguiente:

> Sólo pueden comerse aquellos animales que tengan el casco partido y la pezuña hendida y que rumien
> El camello rumia, pero no tiene partida la pezuña
> El conejo rumia, pero no tiene partida la pezuña
> La liebre rumia, pero no tiene partida la pezuña
> El cerdo no rumia, aunque tiene partida la pezuña
> ___
> No pueden comerse ni los camellos, ni los conejos, ni las liebres ni los cerdos

Glosario

C = ser un animal que se puede comer
P = tener el casco partido
H = tener la pezuña hendida
R = rumiar
M = ser un camello
J = ser un conejo
L = ser una liebre
D = ser un cerdo

Esquematización

$\bigwedge x\,[(Px \wedge Hx \wedge Rx) \leftrightarrow Cx]$
$\bigwedge x\,[Mx \rightarrow (Rx \wedge \neg Hx)]$
$\bigwedge x\,[Jx \rightarrow (Rx \wedge \neg Hx)]$
$\bigwedge x\,[Lx \rightarrow (Rx \wedge \neg Hx)]$
$\bigwedge x\,[Dx \rightarrow (\neg Rx \wedge Hx)]$
___
$\bigwedge x\,[(Mx \vee Jx \vee Lx \vee Dx) \rightarrow \neg Cx]$

Derivación

1.	$\bigwedge x\,[(Px \wedge Hx \wedge Rx) \leftrightarrow Cx]$	P
2.	$\bigwedge x\,[Mx \rightarrow (Rx \wedge \neg Hx)]$	P
3.	$\bigwedge x\,[Jx \rightarrow (Rx \wedge \neg Hx)]$	P
4.	$\bigwedge x\,[Lx \rightarrow (Rx \wedge \neg Hx)]$	P
5.	$\bigwedge x\,[Dx \rightarrow (\neg Rx \wedge Hx)]$	P
6.	$(Pa \wedge Ha \wedge Ra) \leftrightarrow Ca$	RE $\bigwedge$, 1
7.	$Ma \rightarrow (Ra \wedge \neg Ha)$	RE $\bigwedge$, 2
8.	$Ja \rightarrow (Ra \wedge \neg Ha)$	RE $\bigwedge$, 3
9.	$La \rightarrow (Ra \wedge \neg Ha)$	RE $\bigwedge$, 4
10.	$Da \rightarrow (\neg Ra \wedge Ha)$	RE $\wedge$, 5
11.	$Ma \vee Ja \vee La \vee Da$	
12.	$Ma \vee Ja \vee La \vee Da$	RRΠ →, 11[23]
13.	Ma	
14.	$Ra \wedge \neg Ha$	RE →, 7, 13
15.	$\neg Ha$	RE $\wedge$, 14
16.	$\neg Ca$	RE_4 ↔, 6, 15
17.	Ja	
18.	$Ra \wedge \neg Ha$	RE →, 8, 17
19.	$\neg Ha$	RE $\wedge$, 18
20.	$\neg Ca$	RE_4 ↔, 6, 19
21.	La	
22.	$Ra \wedge \neg Ha$	RE →, 9, 21
23.	$\neg Ha$	RE $\wedge$, 22
24.	$\neg Ca$	RE_4 ↔, 6, 23
25.	Da	
26.	$\neg Ra \wedge Ha$	RE →, 10, 25
27.	$\neg Ra$	RE $\wedge$, 26
28.	$\neg Ca$	RE_4 ↔, 6, 27
29.	$\neg Ca$	RE $\vee$, 12, 13-16, 17-20, 21-24, 25-28
30.	$(Ma \vee Ja \vee La \vee Da) \rightarrow \neg Ca$	RI →, 11-29
31.	$\bigwedge x\,[(Mx \vee Jx \vee Lx \vee Dx) \rightarrow \neg Cx]$	RI $\bigwedge$, 30

Al ejercicio 76.

Demostración:

1.	$\bigvee x \bigwedge y\, Pxy$	
2.	$\bigwedge y\, Pay$	
3.	Pab	RE $\bigwedge$, 2
4.	$\bigvee x\, Pxb$	RI $\bigvee$, 3
5.	$\bigwedge y \bigvee x\, Pxy$	RI $\bigwedge$, 4
6.	$\bigwedge y \bigvee x\, Pxy$	RE $\bigvee$, 1, 2-5
7.	$\bigvee x \bigwedge y\, Pxy \rightarrow \bigwedge y \bigvee x\, Pxy$	RI →, 1-6

[23] Repetimos aquí la premisa auxiliar porque de ella vamos a hacer un doble uso: por una parte, constituye el antecedente de la conclusión buscada, y la introducimos con vistas a aprovechar la RI →; por otra parte, se trata de una disyunción, y nos interesa emplearla como premisa de la RE ∨.

Al ejercicio 77.

La respuesta correcta es «Suzanne».

Glosario

M = ser más morena [menos rubia que]
a = Suzanne
b = Edith
c = Lili

Esquematización

aMb [24]
bMc
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,[(xMy \wedge yMz) \rightarrow (xMz)]$ [25]

---

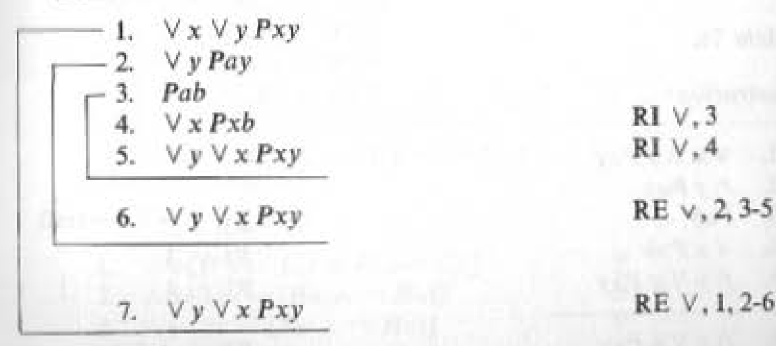
aMc [26]

Derivación

1.	aMb	P
2.	bMc	P
3.	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,[(xMy \wedge yMz) \rightarrow xMz]$	P
4.	$(aMb \wedge bMc) \rightarrow aMc$	RE $\wedge$, 3
5.	$aMb \wedge bMc$	RI $\wedge$, 1, 2
6.	aMc	RE $\rightarrow$, 4, 5

Al ejercicio 78.

Demostración:



1.	$\bigvee x \bigvee y\, Pxy$	
2.	$\bigvee y\, Pay$	
3.	Pab	
4.	$\bigvee x\, Pxb$	RI $\vee$, 3
5.	$\bigvee y \bigvee x\, Pxy$	RI $\vee$, 4
6.	$\bigvee y \bigvee x\, Pxy$	RE $\vee$, 2, 3-5
7.	$\bigvee y \bigvee x\, Pxy$	RE $\vee$, 1, 2-6

---

[24] Es decir: 'Suzanne es más morena que Edith'. Que equivale a la premisa original, 'Edith es más rubia que Suzanne'.

[25] Hay que añadir como premisa el enunciado del carácter transitivo de la relación 'ser más morena que'.

[26] En efecto: si demostramos que Suzanne es más morena que Lili, habremos demostrado que es la más morena de las tres, pues por la primera premisa sabemos también que es más morena que Edith.

8.	$\bigvee x \bigvee y\, Pxy \rightarrow \bigvee y \bigvee x\, Pxy$	RI $\rightarrow$, 1-7
9.	$\bigvee y \bigvee x\, Pxy$	
10.	$\bigvee x\, Pxb$	
11.	Pab	
12.	$\bigvee y\, Pay$	RI $\vee$, 11
13.	$\bigvee x \bigvee y\, Pxy$	RI $\vee$, 12
14.	$\bigvee x \bigvee y\, Pxy$	RE $\vee$, 10, 11-13
15.	$\bigvee x \bigvee y\, Pxy$	RE $\vee$, 9, 10-14
16.	$\bigvee y \bigvee x\, Pxy \rightarrow \bigvee x \bigvee y\, Pxy$	RI $\rightarrow$, 9-15
17.	$\bigvee x \bigvee y\, Pxy \leftrightarrow \bigvee y \bigvee x\, Pxy$	RI $\leftrightarrow$, 8, 16 [27]

Al ejercicio 79.

Glosario

H = ser hombre
P = ser puro
A = amar

Esquematización

$\bigwedge x\,[(Hx \wedge Px) \rightarrow \bigwedge y\,(Py \rightarrow Axy)]$

$\bigwedge x\,[(Hx \wedge Px) \rightarrow Axx]$

Derivación

1.	$\bigwedge x\,[(Hx \wedge Px) \rightarrow \bigwedge y\,(Py \rightarrow Axy)]$	P
2.	$(Ha \wedge Pa) \rightarrow \bigwedge y\,(Py \rightarrow Aay)$	RE $\wedge$, 1
3.	$Ha \wedge Pa$	[28]
4.	$\bigwedge y\,(Py \rightarrow Aay)$	RE $\rightarrow$, 2, 3
5.	$Pa \rightarrow Aaa$	RE $\wedge$, 4 [29]
6.	Pa	RE $\wedge$, 3
7.	Aaa	RE $\rightarrow$, 5, 6
8.	$(Ha \wedge Pa) \rightarrow Aaa$	RI $\rightarrow$, 3-7
9.	$\bigwedge x\,[(Hx \wedge Px) \rightarrow Axx]$	RI $\wedge$, 8

---

[27] Obsérvese que en esta deducción, aparte de las dos grandes subderivaciones que se abren con vistas a aplicar la RI $\rightarrow$, hay en cada tramo —y aquí reside su única dificultad— dos subderivaciones, una de ellas incrustada en la otra, que constituyen aplicaciones de la RE $\vee$.

[28] Antecedente de la conclusión buscada, previa eliminación en ésta del cuantificador universal.

[29] No hay, en la RE $\wedge$, ninguna restricción que nos impida dar este paso. Es usual, cuando se eliminan varios cuantificadores universales, sustituir cada variable por un símbolo distinto (y así, pasar, por ejemplo, de '$\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy$' a '$Pab$'). Es usual, pero no obligatorio.

Al ejercicio 80.

Demostración:

1.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\neg\, Qa$	P
3.	$b = a$	P
4.	$Pa \rightarrow Qa$	RE $\wedge$, 1
5.	$\neg\, Pa$	MT, 4, 2
6.	$\bigwedge x\,[(x = a) \rightarrow \neg\, Px]$	RI =, 5
7.	$(b = a) \rightarrow \neg\, Pb$	RE $\wedge$, 6
8.	$\neg\, Pb$	RE $\rightarrow$, 7, 3

Al ejercicio 81.

Glosario

a = Lancelot
b = la reina Ginebra
c = el rey Arturo
A = amar, no odiar
G = ser amigo

Esquematización

Aab
$\bigwedge x\,(Gxa \rightarrow \neg\, Aax)$
Gca
$\bigwedge x\,[Gxa \rightarrow \bigwedge y\,(Aay \rightarrow \neg\, Axy)]$

$\neg\, Acb$

Derivación

1.	Aab	P
2.	$\bigwedge x\,(Gxa \rightarrow \neg\, Aax)$	P
3.	Gca	P
4.	$\bigwedge x\,[Gxa \rightarrow \bigwedge y\,(Aay \rightarrow \neg\, Axy)]$	P
5.	$Gca \rightarrow \neg\, Aac$	RE $\wedge$, 2
6.	$Gca \rightarrow \bigwedge y\,(Aay \rightarrow \neg\, Acy)$	RE $\wedge$, 4
7.	$Gca \rightarrow (Aab \rightarrow \neg\, Acb)$	RE $\wedge$, 6
8.	$Aab \rightarrow \neg\, Acb$	RE $\rightarrow$, 3, 7
9.	$\neg\, Acb$	RE $\rightarrow$, 1, 8

Al ejercicio 82.

Demostración:

1.	$(a = b) \wedge (b = c)$	[30]
2.	$b = c$	RE $\wedge$, 1
3.	$\bigwedge x\,(x = b) \rightarrow (x = c)$	RI =, 2[31]
4.	$(a = b) \rightarrow (a = c)$	RE $\wedge$, 3
5.	$a = b$	RE $\wedge$, 1
6.	$a = c$	RE $\rightarrow$, 4, 5
7.	$[(a = b) \wedge (b = c)] \rightarrow (a = c)$	RI $\rightarrow$, 1-7
8.	$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z\,\{[(x = y) \wedge (y = z)] \rightarrow (x = z)\}$	RI $\wedge$, 7

Al ejercicio 83.

Glosario

F = ser un filósofo
P = haberse preguntado qué es la filosofía
L = haber ido a dar en la locura
a = Nietzsche
b = el padre Ceballos

Esquematización

$\bigwedge x\,(Fx \rightarrow Px)$
$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Lx)$
Fa
$\neg\, Lb$

$a \neq b$

Derivación

1.	$\bigwedge x\,(Fx \rightarrow Px)$	P
2.	$\bigwedge x\,(Px \rightarrow Lx)$	P
3.	Fa	P
4.	$\neg\, Lb$	P
5.	$Fa \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 1

[30] Puesto que la fórmula a demostrar es un condicional, tomamos como premisa el antecedente (previa eliminación del cuantificador universal).

[31] Recuérdese: la Regla de Introducción de la Identidad dice que si un individuo hace verdadero un cierto enunciado abierto, todos los individuos idénticos a él lo harán también. En este caso el enunciado abierto sería '*x* es idéntico a *b*'.

6.	$Fb \rightarrow Pb$	RE $\wedge$, 1
7.	$Pa \rightarrow La$	RE $\wedge$, 2
8.	$Pb \rightarrow Lb$	RE $\wedge$, 2
9.	$Fa \rightarrow La$	RTr $\rightarrow$, 5, 7
10.	$Fb \rightarrow Lb$	RTr $\rightarrow$, 6, 8
11.	$\neg Fb$	MT, 4, 10
12.	$\wedge x\,[(x = a) \rightarrow Fx]$	RI =, 3
13.	$(b = a) \rightarrow Fb$	RE $\wedge$, 12
14.	$(b \neq a)$	MT, 13, 11

Al ejercicio 84.

Glosario

a = Vivaldi
b = *La Tempesta di Mare*
c = *Il Gardellino*
N = ser veneciano
A = ser autor de

Esquematización

$N\,(\iota x\, Axb)$
$\iota x\, Axc = a$
$\iota x\, Axb = \iota x\, Axc$
―――――――
Na

Derivación

1.	$N\,(\iota x\, Axb)$	P
2.	$\iota x\, Axc = a$	P
3.	$\iota x\, Axb = \iota x\, Axc$	P
4.	$\iota x\, Axb = a$	RTr =, 3, 2 [32]
5.	$\wedge y\,[(y = \iota x\, Axb) \rightarrow Ny]$	RI =, 1
6.	$(a = \iota x\, Axb) \rightarrow Na$	RE $\wedge$, 5
7.	$a = \iota x\, Axb$	33
8.	Na	RE $\rightarrow$, 6, 7

[32] Aplicamos aquí, transformándola en regla, la ley de transitividad de la identidad que hemos demostrado en el ejercicio 82.

[33] Damos por demostrado que la relación de identidad tiene la propiedad simétrica: y así, si (paso 4) $\iota x\, Axb = a$, también ocurrirá que $a = \iota x\, Axb$ (paso 7).

Al ejercicio 85.

Resolución en términos de predicados monádicos

Glosario

N = ser un escritor que comprende la naturaleza humana
I = ser un escritor inteligente
P = ser un verdadero poeta
M = ser un escritor capaz de mover los corazones de los hombres
S = ser Shakespeare
H = haber escrito *Hamlet*

Esquematización

$\wedge x\,(Nx \rightarrow Ix)$
$\wedge x\,(\neg Mx \rightarrow \neg Px)$
$\wedge x\,(Sx \rightarrow Hx)$ [34]
$\wedge x\,(\neg Nx \rightarrow \neg Mx)$
$\wedge x\,(Hx \rightarrow Px)$ [35]
―――――――
$\wedge x\,(Sx \rightarrow Ix)$ [36]

Derivación

1.	$\wedge x\,(Nx \rightarrow Ix)$	P
2.	$\wedge x\,(\neg Mx \rightarrow \neg Px)$	P
3.	$\wedge x\,(Sx \rightarrow Hx)$	P
4.	$\wedge x\,(\neg Nx \rightarrow \neg Mx)$	P
5.	$\wedge x\,(Hx \rightarrow Px)$	P
6.	$Na \rightarrow Ia$	RE $\wedge$, 1
7.	$\neg Ma \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 2
8.	$Sa \rightarrow Ha$	RE $\wedge$, 3
9.	$\neg Na \rightarrow \neg Ma$	RE $\wedge$, 4
10.	$Ha \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 5
11.	$Sa \rightarrow Pa$	RTr $\rightarrow$, 8, 10
12.	$Pa \rightarrow Ma$	RContr $\rightarrow$, 7
13.	$Sa \rightarrow Ma$	RTr $\rightarrow$, 11, 12
14.	$Ma \rightarrow Na$	RContr $\rightarrow$, 9
15.	$Sa \rightarrow Na$	RTr $\rightarrow$, 13, 14
16.	$Sa \rightarrow Ia$	RTr $\rightarrow$, 15, 6
17.	$\wedge x\,(Sx \rightarrow Ix)$	RI $\wedge$, 16

[34] Es decir: 'Para todo x, si x es Shakespeare, entonces x escribió *Hamlet*'. Nótese lo artificioso de la formulación. Véase la segunda solución del ejercicio.

[35] Es decir: si x escribió *Hamlet* es que x era un verdadero poeta. Esto último es condición necesaria de lo primero.

[36] Es decir: 'Para todo x, si x es Shakespeare, x es inteligente'. Cfr. nota 34.

Resolución en términos de predicados poliádicos

Como acabamos de ver, este ejercicio, al igual que todos los demás propuestos por Carroll en su *Symbolic Logic*, admite una solución a base de simples predicados monádicos. Sin embargo, como también acabamos de ver, ello resulta, en este caso al menos, un tanto insatisfactorio. Exige, en efecto, esquematizar el enunciado 'Shakespeare escribió *Hamlet*' como '$\wedge x (Sx \rightarrow Hx)$'. Es evidente que dicho enunciado quedaría mejor analizado en términos de descripciones: '$a = \iota x\, Exb$' (donde '*a*' es 'Shakespeare', '*E*', '... escribió ...', y '*b*', '*Hamlet*').

El razonamiento en cuestión quedaría, pues, mejor esquematizado de la siguiente manera:

$\wedge x (Nx \rightarrow Ix)$
$\wedge x (\neg Mx \rightarrow \neg Px)$
$a = \iota x\, Exb$
$\wedge x (\neg Nx \rightarrow \neg Mx)$
$\wedge x [(x = \iota x\, Exb) \rightarrow Px]$

Ia

Derivación

1.	$\wedge x (Nx \rightarrow Ix)$	P
2.	$\wedge x (\neg Mx \rightarrow \neg Px)$	P
3.	$a = \iota x\, Exb$	P
4.	$\wedge x (\neg Nx \rightarrow \neg Mx)$	P
5.	$\wedge x [(x = \iota x\, Exb) \rightarrow Px]$	P
6.	$Na \rightarrow Ia$	RE $\wedge$, 1
7.	$\neg Ma \rightarrow \neg Pa$	RE $\wedge$, 2
8.	$\neg Na \rightarrow \neg Ma$	RE $\wedge$, 4
9.	$(a = \iota x\, Exb) \rightarrow Pa$	RE $\wedge$, 5
10.	Pa	RE $\rightarrow$, 3, 9
11.	$Pa \rightarrow Ma$	RContr $\rightarrow$, 7
12.	Ma	RE $\rightarrow$, 10, 11
13.	$Ma \rightarrow Na$	RContr $\rightarrow$, 8
14.	Na	RE $\rightarrow$, 12, 13
15.	Ia	RE $\rightarrow$, 6, 14

LOGICA DE ENUNCIADOS

I. ALGUNAS LEYES

1. $\neg\neg p \rightarrow p$
   Ley de Doble Negación
2. $(p \wedge q) \rightarrow p$
3. $p \rightarrow (p \vee q)$
   Leyes de simplificación
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
   Ley de contraposición (del condicional)
5. $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$
   Ley de conmutatividad de la conjunción
6. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
   Ley de conmutatividad de la disyunción
7. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$
   Ley de conmutatividad del bicondicional
8. $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
   Ley de asociatividad de la conjunción
9. $[(p \vee q) \vee r] \rightarrow [p \vee (q \vee r)]$
   Ley de asociatividad de la disyunción
10. $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$
    Ley de asociatividad del bicondicional
11. $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
    Ley de distributividad de la conjunción por la disyunción
12. $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
    Ley de distributividad de la disyunción por la conjunción
13. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
    Ley de distributividad del condicional por la conjunción
14. $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$
    Ley de distributividad del condicional por la disyunción
15. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow r)]$
    Ley de transitividad del condicional
16. $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \rightarrow [(p \leftrightarrow r)]$
    y de transitividad del bicondicional
17. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
    Ley de exportación
18. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$
    Ley del dilema constructivo
19. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$
    Segunda ley del dilema constructivo
20. $[(\neg p \vee \neg q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow q)] \rightarrow (\neg r \vee \neg s)$
    Ley del dilema destructivo
21. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
    Ley de Clarius
22. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
    Ley de De Morgan
23. $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
    Segunda ley de De Morgan
24. $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$
    Ley de inferencia de la alternativa
25. $[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$
    Segunda ley de inferencia de al alternativa
26. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
    Modus ponendo ponens
27. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
    Modus tollendo tollens

II. SISTEMA AXIOMATICO

1. *Axiomas*

A_1 $(p \vee p) \rightarrow p$
A_2 $q \rightarrow (p \vee q)$
A_3 $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
A_4 $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
A_5 $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$,

2. *Reglas de transformación*

RT1. Si X es una tesis del sistema en la que aparecen distintas variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son expresiones bien formadas del cálculo, la expresión resultante de sustituir en X p_1 por Y_1, p_2 por $Y_2, \ldots, p_n$ por Y_n será asimismo una tesis del sistema.

RT2. Si 'X' es una tesis del sistema, y lo es también la expresión '$X \rightarrow Y$', entonces 'Y' es una tesis del sistema.

II. SISTEMA DE REGLAS DE INFERENCIA

1. *Reglas primitivas*

RI∧

$$\frac{\varphi x_1,\ldots,x_n}{\bigwedge x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}$$

Siempre y cuando $x_1, \ldots, x_n$ no aparezcan en ninguna premisa auxiliar no eliminada de la que dependan, respectivamente, $\varphi x_1, \ldots, x_n$

RE∧

$$\frac{\bigwedge x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}{\varphi x_1,\ldots,x_n}$$

RI∨

$$\frac{\varphi x_1,\ldots,x_n}{\bigvee x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}$$

Siempre y cuando $x_1, \ldots, x_n$ no aparezcan ni en $\bigvee x_1, \ldots, x_n(\varphi x_1, \ldots, \varphi x_n)$ ni en X, ni en ninguna premisa auxiliar no eliminada.

RE∨

$$\frac{\begin{array}{l}\bigvee x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)\\ \varphi x_1,\ldots,x_n\\ \quad\vdots\\ X\end{array}}{X}$$

RI =

$$\frac{\varphi t}{\bigwedge x[(x = t) \rightarrow \varphi x]}$$

RE =

$$\frac{\bigwedge x[(x = t) \rightarrow \varphi x]}{\varphi t}$$

RDP

$$\frac{\bigvee y \bigwedge x[\varphi x \leftrightarrow (x = y)]}{\varphi(\iota x \varphi x)}$$

RDI

$$\neg \bigvee y \bigwedge x[\varphi x \leftrightarrow (x = y)]$$

$$\iota x \varphi x = \iota z(z \neq z)$$

2. *Algunas reglas derivadas*

RDf∧

$$\frac{\bigwedge x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}{\neg\bigvee x_1,\ldots,x_n\neg(\varphi x_1,\ldots,x_n)}$$

RDf∨

$$\frac{\bigvee x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}{\neg\bigwedge x_1,\ldots,x_n\neg(\varphi x_1,\ldots,x_n)}$$

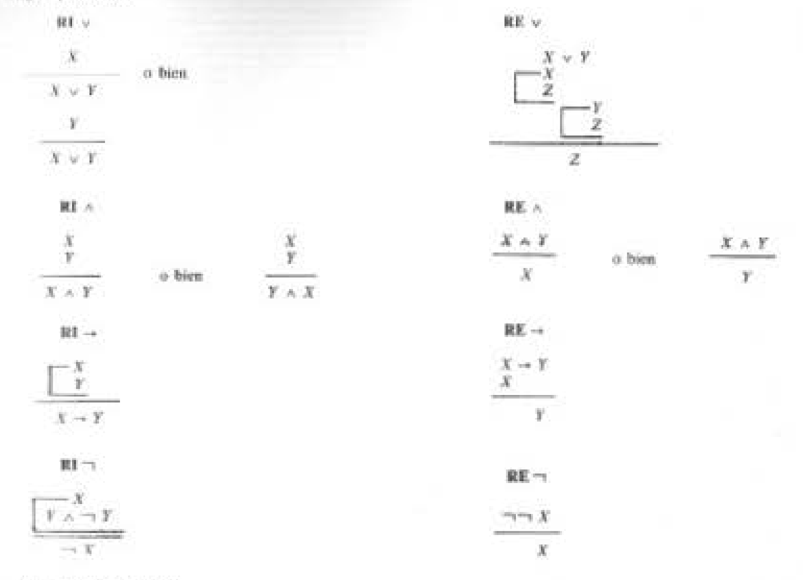
RNeg∧

$$\frac{\neg\bigwedge x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}{\bigvee x_1,\ldots,x_n\neg(\varphi x_1,\ldots,x_n)}$$

RNeg∨

$$\frac{\neg\bigvee x_1,\ldots,x_n(\varphi x_1,\ldots,x_n)}{\bigwedge x_1,\ldots,x_n\neg(\varphi x_1,\ldots,x_n)}$$

1. *Reglas primitivas*



2. *Algunas reglas derivadas*

RTr →
$$\frac{\begin{array}{c}X \rightarrow Y\\ Y \rightarrow Z\end{array}}{X \rightarrow Z}$$

RRfl →
$$\frac{X}{X}$$

RIdem ∧
$$\frac{X \wedge X}{X}$$

RIdem ∨
$$\frac{X \vee X}{X}$$

RDstr ∧ por ∨
$$\frac{X \wedge (Y \vee Z)}{(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)}$$

RDstr ∨ por ∧
$$\frac{X \vee (Y \wedge Z)}{(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)}$$

RExp
$$\frac{(X \wedge Y) \rightarrow Z}{X \rightarrow (Y \rightarrow Z)}$$

RImp
$$\frac{X \rightarrow (Y \rightarrow Z)}{(X \wedge Y) \rightarrow Z}$$

RContr →
$$\frac{X \rightarrow Y}{\neg Y \rightarrow \neg X} \quad \text{o bien} \quad \frac{\neg Y \rightarrow \neg X}{X \rightarrow Y}$$

RDC₁
$$\frac{\begin{array}{c}X \vee Y\\ X \rightarrow Z\\ Y \rightarrow Z\end{array}}{Z}$$

RDD₁
$$\frac{\begin{array}{c}\neg X \vee \neg Y\\ Z \rightarrow X\\ Z \rightarrow Y\end{array}}{\neg Z}$$

RIA₁
$$\frac{\begin{array}{c}X \vee Y\\ \neg X\end{array}}{Y}$$

RConm ∧
$$\frac{X \wedge Y}{Y \wedge X}$$

RConm ∨
$$\frac{X \vee Y}{Y \vee X}$$

MT
$$\frac{\begin{array}{c}X \rightarrow Y\\ \neg Y\end{array}}{\neg X}$$

RDC₂
$$\frac{\begin{array}{c}X \vee Y\\ X \rightarrow Z\\ Y \rightarrow W\end{array}}{Z \vee W}$$

RDD₂
$$\frac{\begin{array}{c}\neg X \vee \neg Y\\ Z \rightarrow X\\ W \rightarrow Y\end{array}}{\neg Z \vee \neg W}$$

RIA₂
$$\frac{\begin{array}{c}X \vee Y\\ \neg Y\end{array}}{X}$$

RI ↔
$$\frac{\begin{array}{c}X \rightarrow Y\\ Y \rightarrow X\end{array}}{X \leftrightarrow Y}$$

RE ↔, 1
$$\frac{\begin{array}{c}X \leftrightarrow Y\\ X\end{array}}{Y}$$

RE ↔, 2
$$\frac{\begin{array}{c}X \leftrightarrow Y\\ \neg Y\end{array}}{\neg X}$$

RE ↔, 3
$$\frac{\begin{array}{c}X \leftrightarrow Y\\ Y\end{array}}{X}$$

RE ↔, 4
$$\frac{\begin{array}{c}X \leftrightarrow Y\\ \neg X\end{array}}{\neg Y}$$

RD ↔
$$\frac{X \leftrightarrow Y}{X \rightarrow Y} \quad \text{o bien} \quad \frac{X \leftrightarrow Y}{Y \rightarrow X}$$

RTr ↔
$$\frac{\begin{array}{c}X \leftrightarrow Y\\ Y \leftrightarrow Z\end{array}}{X \leftrightarrow Z}$$

RI ¬¬
$$\frac{X}{\neg\neg X}$$

REcq
$$\frac{X \wedge \neg X}{Y}$$

Reglas de interdefinición de las conectivas

$$\frac{X \wedge Y}{\neg(\neg X \vee \neg Y)} \qquad \frac{\neg(X \wedge Y)}{\neg X \vee \neg Y} \qquad \frac{X \rightarrow Y}{\neg X \vee Y}$$

$$\frac{X \vee Y}{\neg(\neg X \wedge \neg Y)} \qquad \frac{\neg(X \vee Y)}{\neg X \wedge \neg Y} \qquad \frac{X \rightarrow Y}{\neg(X \wedge \neg Y)}$$

$$\frac{X \vee Y}{\neg X \rightarrow Y} \qquad \frac{X \wedge Y}{\neg(X \rightarrow \neg Y)}$$

LOGICA DE PREDICADOS

I. ALGUNAS LEYES

1. *De predicados monádicos*

1. $\bigwedge x\, Px \leftrightarrow \neg \bigvee x \neg Px$
2. $\bigvee x\, Px \leftrightarrow \neg \bigwedge x \neg Px$
3. $\bigwedge x \neg Px \leftrightarrow \neg \bigvee x\, Px$
4. $\bigvee x \neg Px \leftrightarrow \neg \bigwedge x\, Px$
   Leyes de interdefinición de los cuantificadores
5. $\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \leftrightarrow \neg \bigvee x (Px \wedge \neg Qx)$
6. $\bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx) \leftrightarrow \neg \bigvee x (Px \wedge Qx)$
7. $\bigvee x (Px \wedge Qx) \leftrightarrow \neg \bigwedge x (Px \rightarrow \neg Qx)$
8. $\bigvee x (Px \wedge \neg Qx) \leftrightarrow \neg \bigwedge x (Px \rightarrow Qx)$
   Leyes aristotélicas de oposición
9. $\bigwedge x (Px \leftrightarrow Px)$
   Ley de identidad
10. $\bigwedge x \neg (Px \wedge \neg Px)$
    Ley de contradicción
11. $\bigwedge x (Px \vee \neg Px)$
    Ley de tercio excluso
12. $\bigwedge x (Px \wedge Qx) \leftrightarrow (\bigwedge x\, Px \wedge \bigwedge x\, Qx)$
    Ley de distribución del cuantificador universal por la conjunción
13. $\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge x\, Px \rightarrow \bigwedge x\, Qx)$
    Ley de distribución del cuantificador universal por el condicional
14. $\bigwedge x (Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow (\bigwedge x\, Px \leftrightarrow \bigwedge x\, Qx)$
    Ley de distribución del cuantificador universal por el bicondicional
15. $(\bigwedge x\, Px \vee \bigwedge x\, Qx) \rightarrow \bigwedge x (Px \vee Qx)$
    Ley de contracción del cuantificador universal por la disyunción
16. $\bigvee x (Px \wedge Qx) \rightarrow (\bigvee x\, Px \wedge \bigvee x\, Qx)$
    Ley de distribución del cuantificador particular por la conjunción
17. $\bigvee x (Px \vee Qx) \leftrightarrow (\bigvee x\, Px \vee \bigvee x\, Qx)$
    Ley de distribución del cuantificador particular por la disyunción
18. $(\bigvee x\, Px \rightarrow \bigvee x\, Qx) \rightarrow \bigvee x (Px \rightarrow Qx)$
    Ley de contracción del cuantificador particular por el condicional
19. $[\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \wedge \bigwedge x (Qx \rightarrow Rx)] \rightarrow \bigwedge x (Px \rightarrow Rx)$
    Ley de transitividad del condicional
20. $[\bigwedge x (Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \bigwedge x (Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \bigwedge x (Px \rightarrow \neg Rx)$
    Modo silogístico «*Celarent*»
21. $[\bigwedge x (Qx \rightarrow Rx) \wedge \bigvee x (Px \wedge Qx)] \rightarrow \bigvee x (Px \wedge Rx)$
    Modo silogístico «*Darii*»
22. $[\bigwedge x (Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \bigvee x (Px \wedge Qx)] \rightarrow \bigvee x (Px \wedge \neg Rx)$
    Modo silogístico «*Ferio*»
23. $[\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \wedge Pa] \rightarrow Qa$
    Modus ponendo ponens
24. $[\bigwedge x (Px \rightarrow Qx) \wedge \neg Qa] \rightarrow \neg Pa$
    Modus tollendo tollens
25. $[\bigwedge x (Px \vee Qx) \wedge \neg Pa] \rightarrow Qa$
    Ley de inferencia de la alternativa
26. $\bigwedge x\, Px \rightarrow Pa$
    Ley de especificación
27. $Pa \rightarrow \bigvee x\, Px$
    Ley de particularización

2. *De predicados poliádicos*

1. $\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy \leftrightarrow \neg \bigvee x \bigvee y \neg Pxy$
   Ley de interdefinición de los cuantificadores
2. $[\bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Qxy) \wedge Pab] \rightarrow Qab$
   Modus ponendo ponens
3. $\bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Qxy) \leftrightarrow \neg \bigvee x \bigvee y (Pxy \wedge \neg Qxy)$
   Ley de oposición
4. $\bigwedge x \bigwedge y \neg (Pxy \wedge \neg Pxy)$
   Ley de contradicción
5. $[\bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Qxy) \wedge \bigwedge x \bigwedge y (Qxy \rightarrow Rxy)] \rightarrow \bigwedge x \bigwedge y (Pxy \rightarrow Rxy)$
   Ley de transitividad del condicional
6. $(\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy) \rightarrow Pab$
   Ley de especificación
7. $Pab \rightarrow \bigvee x \bigvee y\, Pxy$
   Ley de particularización
8. $\bigwedge x \bigwedge y\, Pxy \leftrightarrow \bigwedge y \bigwedge x\, Pxy$
9. $\bigvee x \bigvee y\, Pxy \leftrightarrow \bigvee y \bigvee x\, Pxy$
10. $\bigvee x \bigwedge y\, Pxy \rightarrow \bigwedge y \bigvee x\, Pxy$
    Leyes de permutación de los cuantificadores.